차 례

머 리 말

위대한 령도자 **김정일**대원수님께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다. 수학교육을 강화하는것은 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고능력을 키워주는데서 중요한 의의를 가집니다.》

정보산업시대, 지식경제시대에 들어선 오늘 수학의 지식과 방법을 모르고서는 현대과학과 기술을 배울수도 없고 발전시킬수도 없다. 바로 그렇기때문에 수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 된다.

시대의 변천에 따르는 사람들의 생활과 실천의 요구로부터 수와 도형에 관한 단편적인 지식의 축적으로 발생한 수학은 오늘 모든 과학과 기술의 기초로 되는 현대수학으로까지 발전하여왔다.

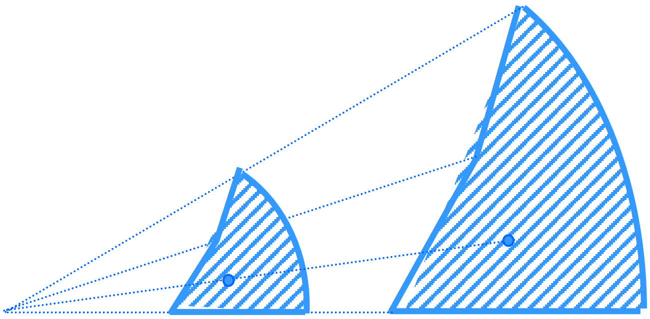
수학을 잘 배워 그 방법을 잘 익히면 머리가 트이고 모든 사물현상을 조리있게 보고 판단하는 힘이 생기며 과학적인 사고능력을 키울수 있다.

아무리 복잡한 수학공식이나 원리라고 하여도 자기 머리로 사고하고 처음부터 리치를 차근차근 따져가면 그것을 확고하게 습득할수 있다. 또한 깊은 지식을 습득하고 수학적지능을 키워나가면 아무리 복잡한 문제라도 쉽게 풀수 있으며 새로운 공식도 발견할수 있다.

4학년 수학에서는 함수의 지식을 넓혀가면서 여러가지 식들, 도형의 크기관계, 수렬 등을 배운다.

우리는 자기 땅에 발을 붙이고 눈은 세계를 보며 조선을 위하여 배우고 또 배워 내 나라, 내 조국을 과학과 기술로 빛내이는 앞날의 훌륭한 인재가 되여야 한다.

제1장. 도형의 닮음



비례선분

닮음도형

삼각비

Sin α tan α

Cos α

제1절. 비례선분

1. 평행직선에서의 비례선분

알아보기 그림 1-1의 ㄱ)에서 $AB//CC_1$이면 $\triangle ABC$의 면적과 $\triangle ABC_1$의 면적은 같다.

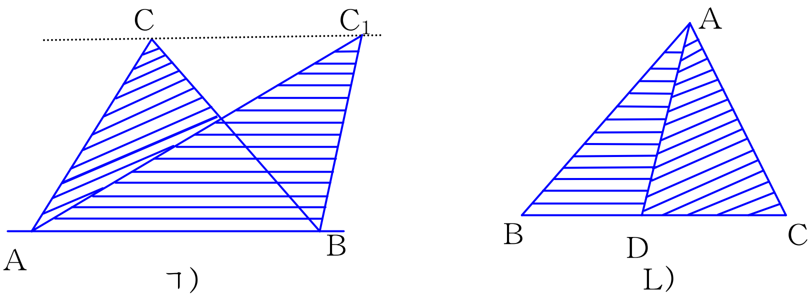


그림 1-1

그림 ㄴ)에서

$$\frac{S(\triangle ABD)}{S(\triangle ADC)}=\frac{BD}{DC}, \quad \frac{S(\triangle ABD)}{S(\triangle ABC)}=\frac{BD}{BC}$$

인가? 여기서 $S(\triangle ABD)$는 $\triangle ABD$의 면적을 표시한것이다.

정리 1. 3각형의 한 변에 평행인 직선은 다른 두 변을 비례하는 선분들로 나눈다.

조건. $\triangle ABC$에서 $DE//BC(D\in AB,\ E\in AC)$

결론. $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\left(\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC},\ \frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}\right)$

(증명) 첫째 비례식을 증명하자.

점 E와 B를 맺고 점 E에서 직선 AB까지의 거리를 h라고 하자.

$$\frac{S(\Delta ADE)}{S(\Delta DBE)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AD\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot DB\cdot h}=\frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

마찬가지로

$$\frac{S(\Delta AED)}{S(\Delta DCE)}=\frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

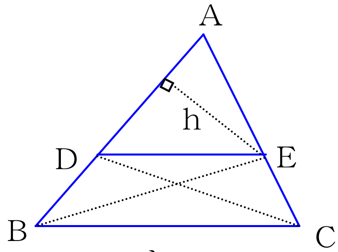


그림 1-2

그런데 $DE//BC$ (조건)이므로

$$S(\triangle DBE)=S(\triangle DCE)$$

$$\frac{S(\Delta ADE)}{S(\Delta DBE)} = \frac{S(\Delta AED)}{S(\Delta DCE)}$$

따라서 식 (1)과 (2)로부터

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

나머지 두 비례식도 마찬가지로 증명된다.

알아보기 그림 1-3 에서 $L // m // n$이면 $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ 인가?

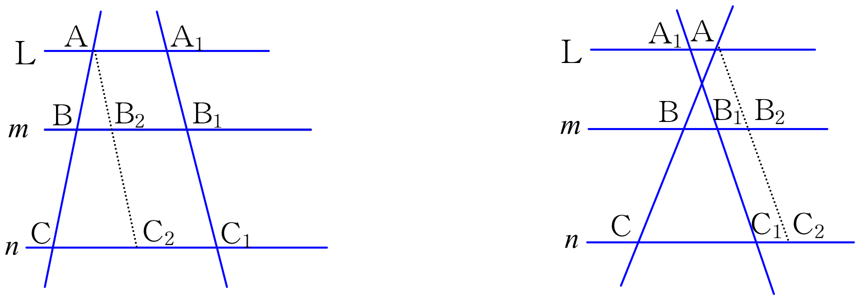


그림 1-3

> 계. 세 평행직선은 그것들과 사귀는 두 직선에서 비례하는 선분들을 끊어낸다.

문 제

1. 그림 1-4에서 $B_1B // CC_1$이면
$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1}$$
이다. 왜 그런가? (점 A를 지나며 BB_1에 평행인 직선을 긋고 생각하여보아라.)

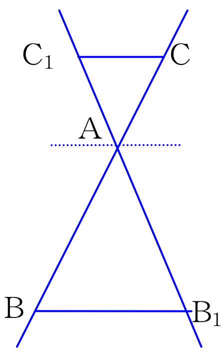


그림 1-4

2. △ABC에서 DE//BC (D∈AB, E∈AC)이고 AD=1.5cm, DB=2cm일 때 다음 비들의 값을 구하여라.
$$\frac{AD}{BD}, \frac{AD}{AB}, \frac{AE}{AC}, \frac{EC}{AC}$$
3. △ABC에서 $BC // B_1C_1$ ($B_1 \in AB$, $C_1 \in AC$) 이고 AB=3cm, B_1A=2cm, C_1C=4cm 일 때 AC_1의 길이를 구하여라.
4. △ABC에서 가운데선 AM에 평행인 직선을 임의로 그어 AB, AC 또는 그 연장선과 사귀는 점을 각각 D, E라고 하면 AD:AE=AB:AC임을 증명하여라.

5. 평행4변형 ABCD의 대각선 AC의 임의의 한 점 P를 지나는 한 직선과 AB, BC, CD, DA 및 그 연장선과의 사귐점을 각각 M, N, M′, N′ 라고 하면

$$PN \cdot PM = PN' \cdot PM'$$

임을 증명하여라.

다음은 정리1의 거꿀정리를 보자.

정리 2. (거꿀정리) 3각형의 두 변을 비례하는 선분들로 나누는 직선은 셋째 변에 평행이다.

조건. △ABC에서

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\left(\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC},\ \frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}\right)\quad (D\in AB,\ E\in AC)$$

결론. DE//BC

(증명) 점 D에서 BC에 평행인 직선을 긋고 AC와 사귀는 점을 E_1이라고 할 때 DE와 DE_1이 일치한다는것을 밝히면 된다.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE_1}{AC}\quad (\text{정리 } 1)$$

그런데 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ (조건)이므로

$$\frac{AE}{AC}=\frac{AE_1}{AC},\quad AE=AE_1$$

따라서 점 E는 E_1과 일치하며 DE는 DE_1과 일치한다.

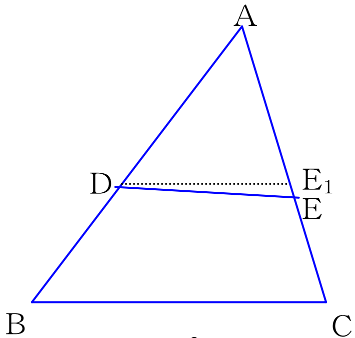


그림 1-5

정리 2에서와 같이 어떤 두 도형 (두 점, 두 선분,…)을 일치시켜서 증명하는 방법을 동일법이라고 부른다.

문 제

1. △ABC에서 변 BA의 연장선에 점 D를 찍고 BC의 연장선에 점 E를 찍었다. 다음과 같은 경우에 AC//DE 인가?

 1) AD:AB=4:3, BC=1.2m, BE=2.8m

 2) AD:BD=8.5:11, $BC=\frac{5}{17}CE$

2. △ABC의 아낙에 한 점 O가 있다. 선분 OA에 AK:KO=1:2 인 점 K를 찍고

점 K에서 AB, AC에 각각 평행인 직선을 그어 OB 및 OC 와 사귀는 점을 각각 L, M이라고 하면 BC//LM이다. 증명하여라.

3. △ABC의 변AB, AC의 임의의 점을 각각 D, E 라고 하자. 점 D에서 BE에 평행인 직선을 그어 AC와 사귀는 점을 F라고 하고 점 E 에서 CD에 평행인 직선을 그어 AB와 사귀는 점을 G라고 하면 GF//BC임을 증명하여라.

알아보기 △ABC의 변 AB를 3등분하고 그 나눔점 D_1, D_2를 각각 지나며 BC에 평행인 직선을 그어 AC와 사귀는 점을 각각 E_1, E_2라고 할 때(그림 1-6)

1. 선분 $D_1E_1=1$이라고 하고 D_2E_2, BC의 길이를 D_1E_1로 표시해보아라.
2. $\frac{AD_1}{AB}=\frac{AE_1}{AC}=\frac{D_1E_1}{BC}$, $\frac{AD_2}{AB}=\frac{AE_2}{AC}=\frac{D_2E_2}{BC}$ 인가?

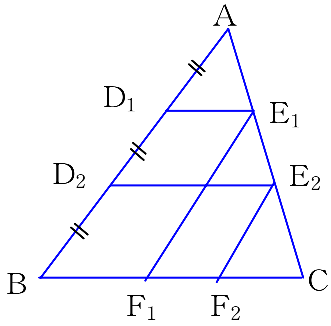


그림 1-6

정리 3. △ABC에서 DE//BC(D∈AB, E∈AC)이면

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

(증명) 그림 1-7에서 DE//BC (조건)이므로 정리 1과 계에 의하여

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \qquad (1)$$

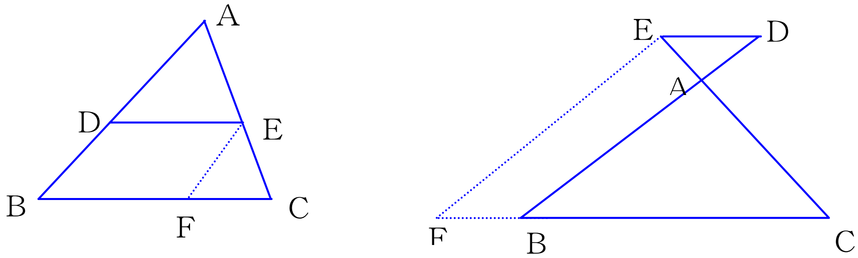


그림 1-7

점 E 에서 AB에 평행인 직선을 긋고 직선 BC와 사귀는 점을 F라고 하면

$$\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC} \quad (정리\ 1)$$

여기서 BF=DE (평행4변형의 맞은변)이므로

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \qquad (2)$$

(1)과 (2)로부터

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

문 제

1. 한 점 O 에서 사귀는 세 직선이 그림 1-8과 같이 평행인 직선과 사귀면

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC},\quad \frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{AB}{BC}$$

이다. 왜 그런가?

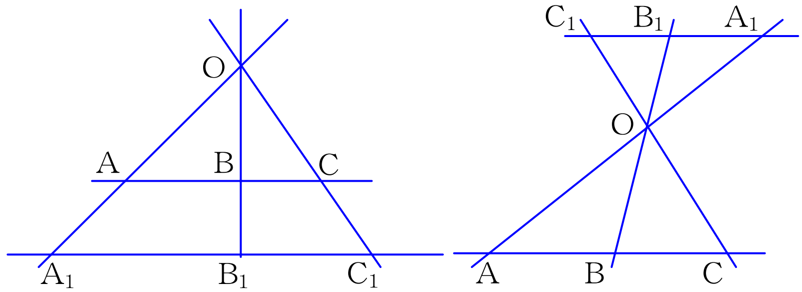
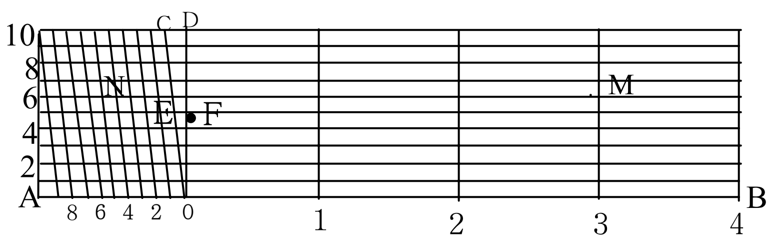


그림 1-8

2. 도면에서 거리를 정밀하게 잴 때 제형자를 쓴다. 그림 1-9에서 AB의 작은 한 눈금은 1mm이다. 이 제형자를 쓰면 1mm 눈금사이를 다시 10등분하지 않아도 0.1mm까지 잴수 있다.



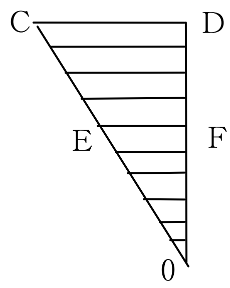


그림 1-9

1) 그림을 보고 선분 MN의 길이를 구하여라.

2) 그림에서 EF=0.6mm이다. 왜 그런가?

3. △ABC의 변 AB, AC에서 각각 점 D, E를 잡되 BD=CE로 되게 하고 직선 DE 와 BC의 사귐점을 F라고 하면 DF:EF=AC:AB이다. 증명하여라.(AB≠AC) (그림 1-10)

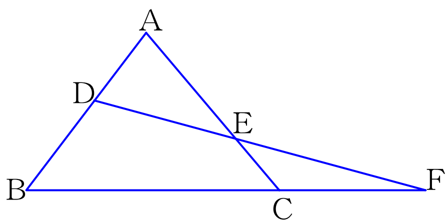


그림 1-10

4. 제형 ABCD의 밑변 BC에 평행인 직선이 AB, AC와 사귀는 점을 각각 E, F 라고 하고 DE, DF의 연장선과 직선 BC가 사귀는 점을 각각 G, H라고 하면 GH=BC임을 증명하여라.
5. AB>AC인 △ABC에서 변 AB에 AC와 같은 AD를 잡고 가운데선 AM과 CD 의 사귐점을 P라고 하면 AB:AC=CP:DP임을 증명하여라.
6. 제형 ABCD의 대각선 AC, BD의 사귐점 O를 지나 평행인 변 AD, BC에 평행되게 그은 직선이 옆변 AB, CD와 사귄 점을 각각 E, F라고 하면 다음 같기식이 성립한다는것을 증명하여라.

$$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}=\frac{2}{EF}$$

2. 비례선분그리기

례 1 주어진 선분 AB를 2:3의 비로 나누어라.

그리기

① 점 A와 B로부터 서로 평행인 반직선들을 AB에 관하여 반대쪽에 긋는다.(그림 1-11)
② 거기에 같은 선분들을 A로부터 두개(AC), B로부터 세개(BD) 끊는다.
③ C와 D를 맺는다.
④ CD가 AB와 사귀는 점 P를 구한다.
이 점은 AB를 2:3으로 나눈다.

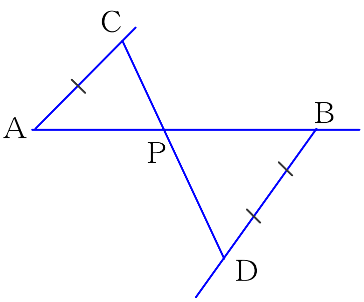


그림 1-11

선분 AB의 점 M에 대하여 AM:MB=$a:b$이면 점 M은 선분 AB를 $a:b$의 비로 **내분(아낙나눔)한다**고 말한다.(그림 1-12)

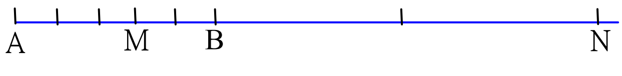


그림 1-12

선분 AB의 연장선의 점 N에 대하여 AN:BN=$a:b$이면 점 N은 선분 AB를 $a:b$의 비로 **외분(바깥나눔)한다**고 말한다.

례 2 주어진 선분 AB를 3:5의 비로 줄여라.(그림 1-13)

그리기

① 한 끝점 A로부터 반직선을 하나 긋는다.
② 그 반직선에 점 A로부터 같은 선분을 5번 끊는다.

③ 다섯번째 나눔점 C를 B와 맺는다.

④ 세번째 나눔점 D를 지나며 CB에 평행인 직선을 그어 AB와 사귀는 점 B_1을 구한다.

$AB_1 : AB = 3 : 5$

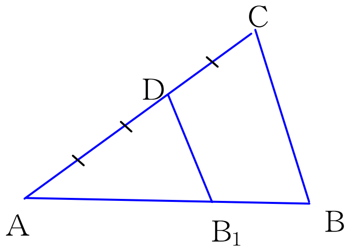


그림 1-13

문 제

1. △ABC의 변 AB를 2:1로 내분하는 점을 P, 변 AC를 3:1로 외분하는 점을 Q라고 하면 PC//BQ라는것을 증명하여라.
2. 선분 AB를 하나 긋고 다음과 같은 비로 나누어라.

   1) 3:4　　2) 5:3　　3) 2.5:2　　4) $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}$
3. 선분 AB를 하나 긋고 그것을 다음과 같은 비로 외분 및 내분하여라.

   1) 3:2　　2) 2:1　　3) 5:2　　4) 3:8
4. 선분 AB를 하나 긋고 다음과 같은 비로 줄여라.

   1) 2:3　　2) 5:6　　3) 2:2.5　　4) $\frac{3}{4}:2$

련 습 문 제

1. 지점 A에서 강건너편에 보이는 지점 B까지의 거리를 알려고 그림 1-14에서와 같이 점 B_1, C_1, C를 정하고 A로부터 그 점들까지의 거리를 재였다. $CC_1 \perp AC_1$, $BB_1 \perp AB_1$이고 AC=4.5m, AC_1=3.5m, C_1B_1=10m일 때 AB는 얼마인가?

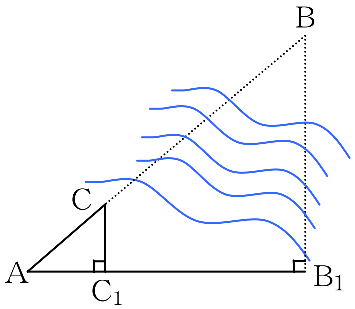


그림 1-14

2. △ABC의 밑변 BC에 평행인 직선이 옆변과 사귀는 점을 각각 B_1, C_1이라고 하면 $\triangle AB_1C_1$과 △ABC의 밑변의 비는 그 밑변에 그은 높이의 비와 같다. 증명하여라.
3. 총으로 목표판을 겨눌 때(그림 1-15에서 A는 조문, M은 조성의 중심, N은 조준점) 조성의 중심 M이 1mm 편차되게 조준하면 총알이 목표판에 얼마나 빗맞겠는가? AM=38cm, AN=100m로 보고 계산하여라.

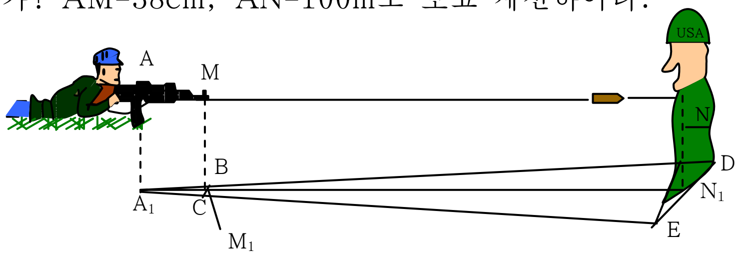


그림 1-15

4. 학생이 나무의 높이를 재기 위하여 그림 1-16과 같이 삼각자의 빗변의 연장선이 나무의 꽉대기 C를 지나도록 하였다. ($AB_1//A_0C_0$) B_1B=30cm, B_1A=40cm, 학생으로부터 나무밑까지의 거리 A_0C_0=16m, 그 학생의 눈까지의 높이 AA_0=1.5m일 때 나무의 높이를 구하여라.

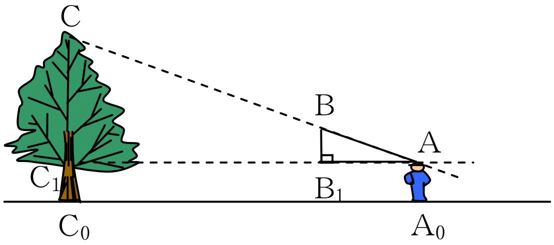


그림 1-16

5. △ABC의 정점 A에서 그은 높이를 AD라고 할 때 BD=15m, DC=27m, AC=45m이다. BC의 수직2등분선이 직선 AC와 사귀는 점을 E 라고 할 때 선분 AE의 길이를 구하여라.

6. 4각형 ABCD의 한 변 AB의 임의의 한 점 A_1에서 대각선 AC에 평행인 직선을 그어 BC와 사귀는 점을 B_1, B_1에서 BD에 평행인 직선을 그어 CD와 사귀는 점을 C_1, C_1에서 CA에 평행인 직선을 그어 AD와 사귀는 점을 D_1이라고 할 때 4각형 $A_1B_1C_1D_1$이 평행4변형이라는것을 증명하여라.

7. 그림 1-17에서 BD=DC이고 AD//GE이다. 이때 다음것을 증명하여라.

1) $\frac{AG}{AC}=\frac{ED}{BD}$

2) $\frac{AG}{AF}=\frac{AC}{AB}$

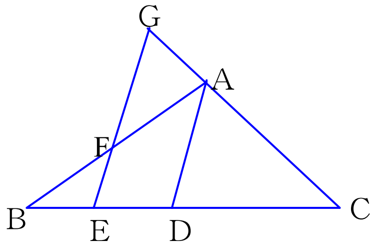


그림 1-17

8. △ABC의 변 BC에 BE=$\frac{1}{3}$BC되게 점 E를 찍고 변 AC의 가운데점을 D라고 하면 BD는 AE에 의하여 2등분된다. 증명하여라.

9. △ABC의 변 BC, CA, AB 혹은 그 연장선과 임의의 직선과의 사귐점을 각각 D, E, F라고 할 때(그림 1-18)

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

임을 증명하여라.(**메네라우스의 정리**)

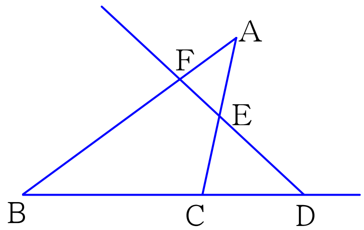


그림 1-18

10. △ABC의 변 BC, CA, AB혹은 그 연장선의 점을 각각 D, E, F라고 하자. 이 점들가운데서 하나가 또는 모두가 연장선에 있고

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

이면 D, E, F는 한 직선에 놓인다.(**메네라우스의 정리의 거꿀정리**) 증명하여라.

11. 직선도로우의 두 점 A, B에 높이가 같은 가로등이 있다. 직선 AB를 따라 A로부터 B로 가는 사람의 앞뒤에 생기는 그림자의 합이 일정함을 증명하여라.

12. △ABC안의 임의의 한 점 P를 지나 변 BC, CA, AB에 평행인 직선을 긋고 세 변과의 사귐점을 각각 D, E, F, G, H, K라고 하면

$$\frac{DE}{BC}+\frac{FG}{CA}+\frac{HK}{AB}=2$$

임을 증명하여라.

13. 바른△ABC의 변의 길이는 a이고 M, N은 각각 AB, AC의 가운데점, D는 MN의 임의의 한 점, BD, CD의 연장선이 AC, AB와 사귀는 점을 각각 E, F라고 하면 $\frac{1}{CE}+\frac{1}{BF}$의 값은 (　　)이다.

1) $\frac{1}{a}$　　2) $\frac{2}{a}$　　3) $\frac{3}{a}$　　4) D의 위치에 따라 변한다.

제2절. 닮음도형

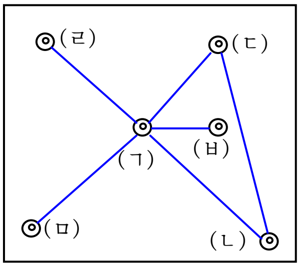
1. 닮음도형



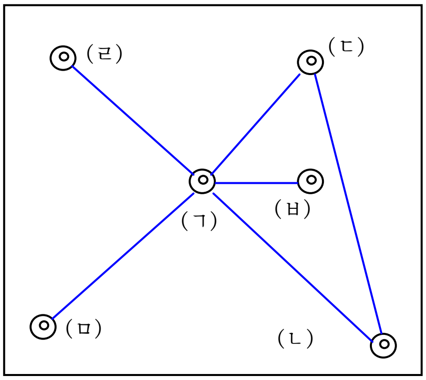


그림 1-19

알아보기 그림 1- 20은 어떤 지역의 략도인데 크기가 서로 다르다. 대응하는 두쌍의 지점들과 각들을 재고 거리들의 비와 각들의 크기를 비교하여보아라.



①



②

그림 1-20

두 도형에서 대응하는 선분들의 비가 다 같고 대응하는 각들의 크기가 같을 때 그 두 도형은 닮았다고 말한다.

두 도형 F와 F_1이 닮았다는것을

$$F \backsim F_1$$

과 같이 표시한다.

닮은 두 도형에서 대응하는 선분들의 비를 닮음비라고 부른다.

문 제

1. 그림 1-20에서 ①에 대한 ②의 닮음비가 2라면 ②에 대한 ①의 닮음비는 얼마인가?
2. 축척 1:300 000인 지도에서 실제거리 450km는 얼마의 길이로 나타나겠는가?
3. 도형 F에 대한 도형 F_1의 닮음비는 3, 도형 F_1에 대한 F_2의 닮음비를 2라고 할 때
   1) F에 대한 F_2의 닮음비는 얼마인가?
   2) F_2에 대한 F_1의 닮음비, F_1에 대한 F의 닮음비는 얼마인가?
      또 F_2에 대한 F의 닮음비는 얼마인가?

2. 중심닮음변환

알아보기 아래의 두 그림에서 작은 도형에 대한 큰 도형의 닮음비는 2이다.

1) 그림 1-21에서 점 M에 대응하는 점 M_1을 구하여라.

2) 그림 1-22에서 도형 F_1은 점 O를 중심으로 잡고 도형 F를 2배로 늘인 그림이다. 비 $A_1D_1:AD$, $D_1C_1:DC$는 얼마인가? $\angle A$와 $\angle A_1$를 비교하여라.

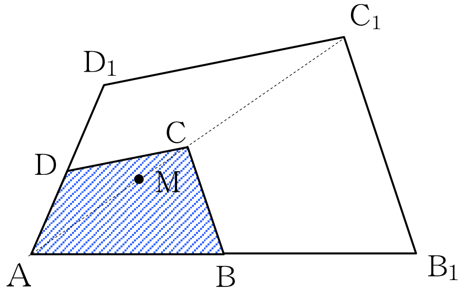


그림 1-21

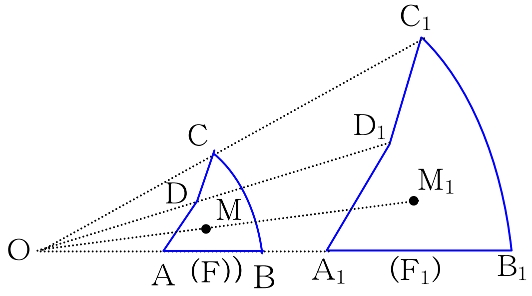


그림 1-22

평면에 한 점 O와 정수 k가 정해졌을때 도형 F의 매 점 A를 반직선 OA에서 $OA_1=kOA$로 되는 점 A_1로 넘기는것을 점 O를 닮음중심으로 하고 수 k를 중심닮음비로 하는 중심닮음변환이라고 부른다.

그리고 이것을 간단히 중심닮음변환 (k, O)로 표시한다.

여기서

$k>1$이면 F_1은 F를 k배로 늘인 도형,

$k<1$이면 F_1은 F를 k배로 줄인 도형,

$k=1$이면 F_1은 F와 일치하는 도형

이다.(그림 1-23)

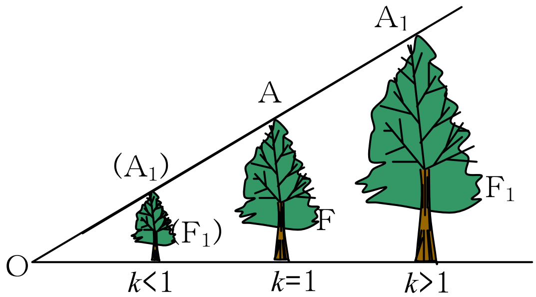


그림 1-23

문 제

1. 그림 1-24과 같이 된 도형을 다음과 같이 각각 중심닮음변환하여라.

1) 중심닮음변환 (3, B)

2) 중심닮음변환 ($\frac{1}{2}$, C)

3) 중심닮음변환 ($\frac{2}{3}$, P)

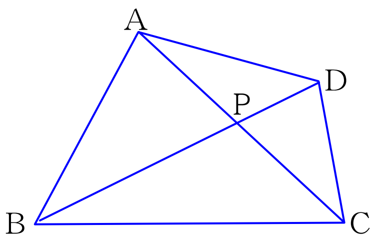
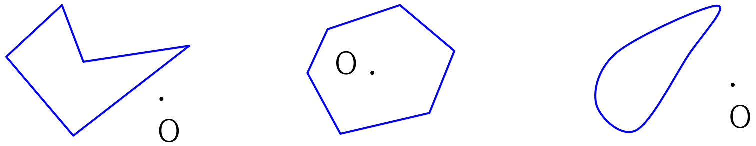


그림 1-24

2. 다음 도형들을 주어진 점에 대하여 중심닮음변환하여라.



k=2 $k=\frac{1}{2}$ k=1.5

그림 1-25

3. 선분 AB를 하나 긋고 직선 AB밖에 한 점 O를 찍어라.(그림 1-26) 중심닮음변환 (3, O)에 의하여 점 A, B에 대응하는 점 A_1, B_1을 구하여라.

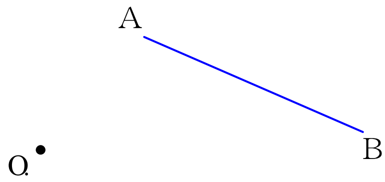


그림 1-26

> 정리 1. 중심닮음변환에 의하여 선분은 그에 평행인 선분으로 넘어가며 이 선분의 주어진 선분에 대한 비는 중심닮음비와 같다.

(증명) 주어진 선분을 AB라고 하고 중심닮음변환 (k, O)에 의하여 $A \to A_1$, $B \to B_1$라고 하자. 그러면

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} (= k)$$

따라서 변환 (k, O)에 의하여 선분 AB는 선분A_1B_1로 넘어가고 $AB \parallel A_1B_1$이다.

$$\therefore \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1} (= k)$$

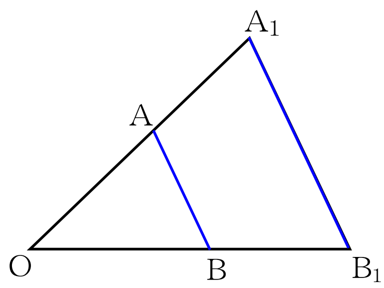


그림 1-27

> 계. 중심닮음변환에 의하여 반직선(직선)은 그에 평행인 반직선(직선)으로 넘어간다.

> 정리 2. 중심닮음변환에 의하여 각은 같은 크기의 각으로 넘어간다.

(증명) 주어진 각을 ∠BAC라고 하자.

중심닮음변환 $(k,\ O)$에 의하여 $\angle BAC$가 $\angle B_1A_1C_1$로 넘어간다고 하자.

이때 정리 1에 의하여

$AB \parallel A_1B_1,\ AC \parallel A_1C_1$

따라서 $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$

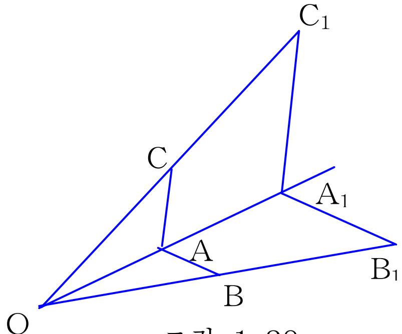


그림 1-28

중심닮음변환에 의하여 도형 F가 F_1로 넘어가면 F와 F_1은 닮고 그 닮음비는 중심닮음비와 같다.

문 제

1. 중심닮음변환에서 직선 AB가 닮음중심 O를 지나는 경우에는 대응하는 직선 A_1B_1은 직선 AB와 일치한다. 왜 그런가?
2. 논밭이나 건설물터전 같은것의 도면을 그리려고 할 때 평판측량을 한다.
   그림 1-29는 평판측량에서 구역 ABCDE의 줄인 그림(닮음도형)을 그리는 한 방법을 보여주고있다.

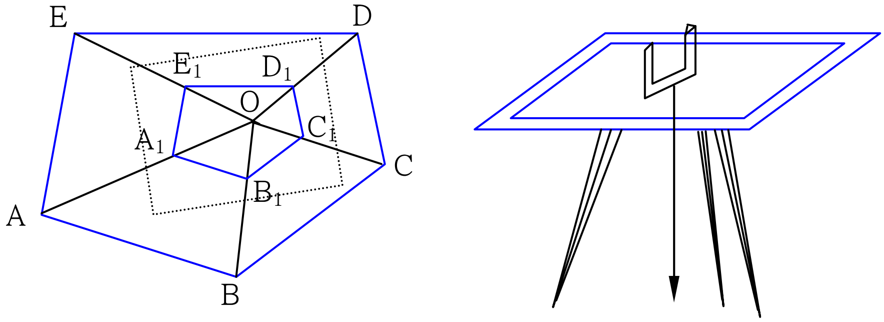


그림 1-29

1) 이때 측량기의 추가 가리키는 곳은 거리를 재는 기준점이다.
   이 점은 도면에서 무슨 점에 해당하겠는가?

2) 축척 1:1 000으로 그리기 위하여서는 중심닮음비를 얼마로 잡아야 하는가?

중심닮음변환을 리용하는 그리기 문제를 보자.

례 중심각이 뾰족각인 부채형 OAB가 있다. 바른4각형 CDEF를 그리는데 변 DE는 반경 OB에 놓이고 정점 C, F는 각각 반경 OA, 활등 $\overset{\frown}{AB}$에 놓이도록 하여라.

그리기

① 정점 D_1, E_1이 반경 OB에, 정점 C_1이 반경 OA에 놓이는 어떤 바른4각형 $C_1D_1E_1F_1$을 그린다.
(점 F_1이 활등 $\overset{\frown}{AB}$에 놓이는 조건제외)

② 바른4각형 $C_1D_1E_1F_1$을 중심닮음변환하여 정점 F_1의 대응점 F가 활등 $\overset{\frown}{AB}$에 놓이게 하자.
이때 얻어지는 4각형 CDEF는 주어진 조건을 만족시키는 바른4각형이다.(그림 1-30)

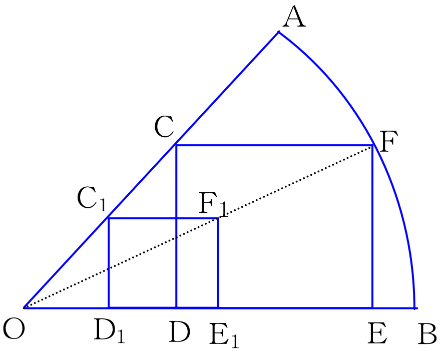


그림 1-30

문 제

1. △ABC에서 ∠B=45°, ∠C=60°, 높이 AH=3cm이다. 그 3각형을 그려라.
2. △ABC에서 AB:AC=3:2, ∠A=60°이고 가운데선 AM=3cm이다. 그 3각형을 그려라.
3. 평행4변형 ABCD에서 ∠B=60°, AB:BC=2:3, AC=8cm이다. 이 평행4변형을 그려라.
4. 주어진 ∠XOY의 두 변 OX, OY에 접하며 이 각안에 있는 점 P를 지나는 원을 그려라.
5. 대각선과 한 변의 합 L을 알고 바른4각형을 그려라.
6. △ABC에서 ∠A=α, 정점 A에서 그은 높이 AH=h_a, BH:HC=m:n이다. 그 3각형을 그려라.

3. 3각형의 닮음조건

두 3각형에서 대응하는 각이 다 같고 대응하는 변들의 비가 다 같으면 두 3각형은 닮은 3각형이다.

그러나 매번 이런 조건을 다 알아보고 닮음을 알아내는것은 불편하다.

이런 조건들가운데서 몇가지만 알아보고도 닮음을 알아낼수가 있다.

3각형의 합동조건 《세변조건》, 《변각변조건》, 《각변각조건》에 따르는 3각형의 닮음조건을 보자.

정리 3. 두 3각형에서 세쌍의 대응변의 비가 다 같으면 그 두 3각형은 닮았다.

조건. $\triangle ABC$와 $\triangle A_1B_1C_1$에서

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}\ (=k)$$

결론. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

(증명) 중심닮음변환 (k, A)에 의하여

$\triangle ABC$를 $\triangle ADE$로 넘기면

$$\left.\begin{array}{l} AD = k\cdot AB \\ DE = k\cdot BC \\ EA = k\cdot CA \end{array}\right\}\text{(정리 1)}$$

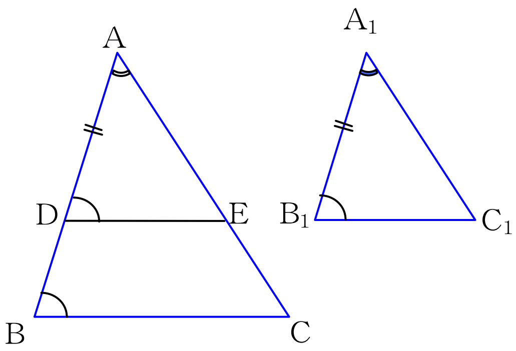


그림 1-31

여기서

$$\left.\begin{array}{l} k\cdot AB = A_1B_1 \\ k\cdot BC = B_1C_1 \\ k\cdot CA = C_1A_1 \end{array}\right\}\text{(조건)}$$

이므로 $\triangle ADE$와 $\triangle A_1B_1C_1$에서

$$\left.\begin{array}{l} AD = A_1B_1 \\ DE = B_1C_1 \\ EA = C_1A_1 \end{array}\right\}$$

따라서 $\triangle ADE \equiv \triangle A_1B_1C_1$(세변조건)

그런데 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$(그리기)

이므로 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

문 제

1. 두 3각형의 변들이 다음과 같을 때 그 두 3각형은 닮았겠는가?
   1) 4cm, 5cm, 6cm ; 8cm, 10cm, 12cm
   2) 2m, 3m, 1.5m ; 9cm, 45mm, 6cm
   3) 1.5m, 2m, 3m ; 2.5m, 2m, 2.5m
2. $\triangle ABC$와 $\triangle A_1B_1C_1$에서

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$$

   이고 $\angle A=17°\ 2'$, $\angle B=67°\ 35'$ 이다. $\angle C_1$를 구하여라.
3. 두 4각형 ABCD 와 $A_1B_1C_1D_1$에서

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1A_1}{DA}=\frac{A_1C_1}{AC}$$

   이면 대응하는 아낙각들은 서로 같다. 증명하여라.

정리 4. 두 3각형에서 두쌍의 대응변의 비가 같고 그사이의 각이 같으면 그 두 3각형은 닮았다.

조건. $\triangle ABC$와 $\triangle A_1B_1C_1$에서

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}\ (=k)$$

$$\angle A=\angle A_1$$

결론. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$(그림 1-32)

(증명) 중심닮음변환 (k, A)에 의하여

$\triangle ABC$를 $\triangle ADE$로 넘기면

$$\left.\begin{array}{l} AD=k\cdot AB \\ AE=k\cdot AC \end{array}\right\} \text{(정리 1)}$$

여기서

$$\left.\begin{array}{l} k\cdot AB=A_1B_1 \\ k\cdot AC=A_1C_1 \end{array}\right\} \text{(조건)}$$

이므로 $\triangle ADE$ 와 $\triangle A_1B_1C_1$에서

$AD=A_1B_1$, $AE=A_1C_1$

그리고 $\angle A=\angle A_1$ (조건)

따라서 $\triangle ADE \equiv \triangle A_1B_1C_1$ (변각변조건)

그런데 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$ (그리기)이므로

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

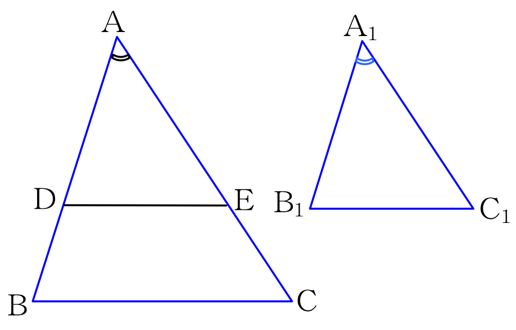


그림 1-32

정리 4의 증명방법으로부터 두 직3각형에서의 닮음조건을 다음과 같이 말할수 있다.

두 직3각형에서 빗변들의 비와 한쌍의 대응하는 직각변들의 비가 같으면 두 직3각형은 닮았다.

문 제

1. 1) 두 직3각형에서 대응하는 직각변들의 비가 같으면 그 두 직3각형은 닮았다. 왜 그런가?
   2) 두 2등변3각형에서 정각들이 같으면 그 두 2등변3각형은 닮았다. 왜 그런가?
2. 그림 1-33에서 닮은 3각형들을 골라내여라.

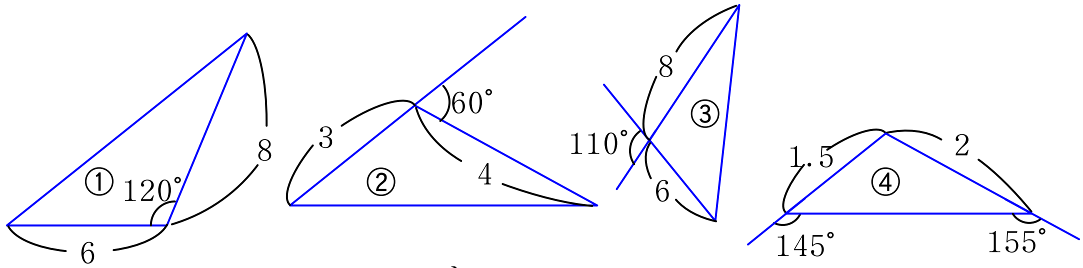


그림 1-33

3. △ABC가 있다. BA의 연장선에 $AB_1=3AB$인 점 B_1을 찍고 CA의 연장선에 $AC_1=3CA$인 점 C_1을 찍었다.

1) $\triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1$인가?

2) $B_1C_1=15$cm일 때 BC의 길이는 얼마인가?

4. △ABC와 △DEF에서 ∠A=∠D이고 $AB=\frac{n}{m}\cdot AC$, $DE=\frac{n}{m}\cdot DF$이면

$$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

이다. 증명하여라.

정리 5. 두 3각형에서 두쌍의 대응하는 아낙각이 각각 같으면 그 두 3각형은 닮았다.

조건. △ABC와 $\triangle A_1B_1C_1$에서 $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$

결론. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ (그림 1-34)

(증명) $\frac{A_1B_1}{AB}=k$라고 하자.

중심닮음변환 (k, A)에 의하여

△ABC를 △ADE로 넘기면

$AD=k\cdot AB$ (정리 1)

여기서 $k\cdot AB=A_1B_1$,

$\angle B=\angle B_1$(조건) 이므로

△ADE와 $\triangle A_1B_1C_1$에서

$AD=A_1B_1$, $\angle ADE=\angle B_1$

그리고 $\angle A=\angle A_1$(조건)

따라서 $\triangle ADE\equiv\triangle A_1B_1C_1$

(각변각조건)

그런데 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$(그리기)이므로

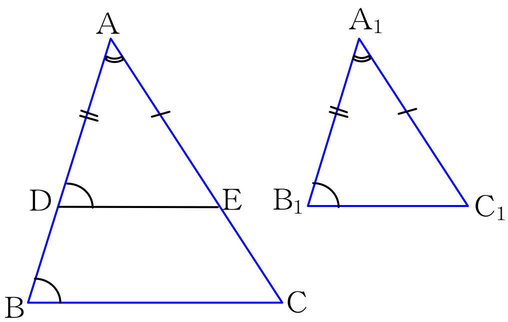


그림 1-34

$$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$$

두 다각형에서 대응하는 변의 비가 같고 대응하는 각이 같으면 그 두 다각형은 닮은 다각형이다. 즉

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{C_1D_1}{CD}=\dfrac{D_1A_1}{DA}=\cdots \\ \angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1, \\ \angle C=\angle C_1,\ \angle D=\angle D_1,\ \cdots\end{array}\right\}\Rightarrow \text{다각형 } ABCD\cdots \backsim \text{ 다각형 } A_1B_1C_1D_1\cdots$$

문 제

1. 그림 1-35에서 닮은 3각형을 골라내여라.

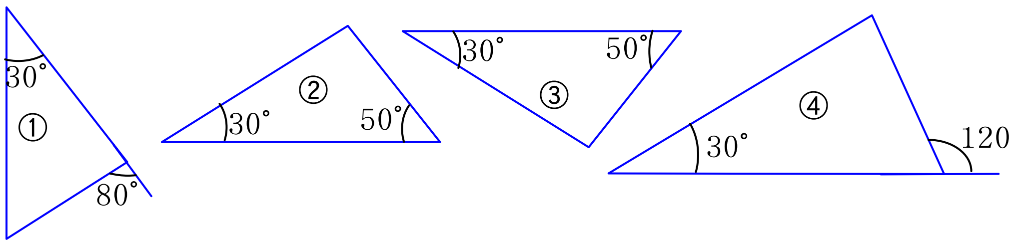


그림 1-35

2. 2등변△ABC의 밑변 BC의 끝점 B에서 맞은변에 수직선 BD를 그으면 $BC^2=2AC\cdot CD$임을 증명하여라.
3. △ABC에서 변 AB의 한 점 D에서 ∠ADE = ∠C로 되게 반직선을 그어 변 AC와 사귀는 점을 E라고 하면 △ADE∽△ABC이다. 증명하여라.
4. 변의 개수가 같은 두 바른다각형은 닮은 다각형이다. 증명하여라.
5. 제형 ABCD(BC//AD)의 중간선 EF(E∈AB, F∈CD)를 그었다.
   1) 제형 ABCD와 EBCF는 닮은 4각형인가?
   2) 제형 AEFD와 EBCF는 닮은 4각형인가?
   3) 밑변 BC에 평행인 직선을 어떤 조건에 맞게 그어야 주어진 제형은 서로 닮은 두 제형으로 나누어지겠는가?
6. 직4각형 ABCD(AB>AD)가 있다. AD를 AB우에 겹치게 접고 그 접은 자리를 AE라고 하자.(점 E는 DC에 있다.) 다음에 AE를 AB에 겹치게 접었을 때 AE와 AB의 길이가 같고 완전히 겹친다면 이 직4각형을 긴 변의 가운데점을 지나도록 자를 때 본래의 직4각형과 닮은 직4각형이 얻어진다는 것을 증명하여라.
7. 직3각형 ABC에서 직각을 낀 변 AB, AC를 한 변으로 하는 바른3각형 ABD, ACE를 바깥쪽에 만들고 A로부터 빗변 BC에 내린 수직선의 밑점을 H라고 할 때 △BDH∽△AEH임을 증명하여라.

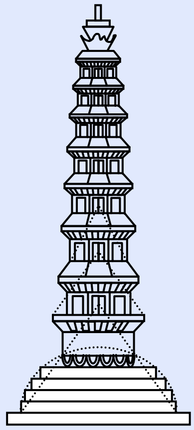
상 식

고려시기 돌탑의 기하학적원리

그림은 고려시기 돌탑인 홍복사 6각 7층탑이다. 탑의 기단너비 AB를 직경으로 하는 원을 그리면 매 기단들의 끝부분이 이 원둘레에 놓인다.

기단너비 AB를 밑변으로 하는 바른 3각형을 그리면 정점이 1층 몸돌중심에 놓인다. 지붕돌폭을 밑변으로 하는 바른 3각형을 그리면 다음 층의 지붕끝 중심에 정점이 놓인다.

이때 그려지는 3각형들의 닮음비를 가지고 탑의 매 부분들이 축소되여 탑이 이루어졌다.



4. 닮음도형의 둘레와 면적

알아보기 1. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$일 때 그 3각형들의 둘레의 비가 닮음비와 같겠는가?

2. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$일 때 $\frac{B_1C_1}{BC} = k$이면 $\frac{S(A_1B_1C_1)}{S(ABC)} = k^2$ 이겠는가?

닮은 두 다각형의 둘레의 비는 닮음비와 같다.

닮은 두 다각형의 면적의 비는 닮음비의 2제곱과 같다.

이 성질은 일반적으로 닮은 곡선도형에 대해서도 그대로 성립한다.

문 제

1. 중심닮음변환 (3, O)에 의하여 변의 길이가 각각 17cm, 23cm, 21cm인 $\triangle ABC$가 $\triangle A_1B_1C_1$로 되였다. $\triangle A_1B_1C_1$의 둘레를 구하여라.
2. 바른4각형 ABCD에서 AD의 가운데점을 F라고 하고 BF와 AC와의 사귐점을 G라고 할 때 $\triangle GAF$와 $\triangle BGC$의 면적의 비를 구하여라.

3. 여러가지 유희시설을 갖춘 현대적인 공원이 또 새로 건설되였다. 이 공원의 모양을 축척 1:4 000으로 그린 도면에서 그의 둘레가 120cm이다. 이 공원의 실제 둘레를 구하여라.

4. 위대한 령도자 **김정일**대원수님께서는 우리 나라의 땅들을 사회주의조선의 땅답게 전변시킬데 대한 웅대한 토지정리구상을 펼쳐주시였다. 그림 1-36은 축척이 1:10 000인 도면이다. 토지를 정리하여 빗선을 친 부분의 논을 직4각형모양으로 만들었다. 실제로 늘어난 면적을 눈금자로 재여서 대략 구하여라.

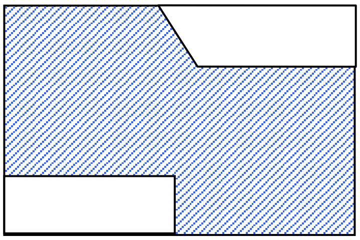


그림 1-36

련 습 문 제

1. 정각 ∠A=36° 인 2등변3각형 ABC에서 ∠B의 2등분선이 맞은변과 사귀는 점을 D라고 하면 △BCD∽△ABC이다. 증명하여라.

2. 그림 1-37은 도형을 늘이거나 줄일 때 쓰는 확대기의 원리를 보여주고있다.

S를 고정하고 바늘 A를 주어진 도형을 따라 움직여가면 연필끝 (E)은 닮은 도형을 그린다. 여기서 △CSE와 △DSA는 2등변3각형이고 4각형 ABCD는 평행4변형으로 되여있다.

1) ∠C가 달라져도 늘 △SDA∽△SCE이다. 왜 그런가?

2) 점 S, A, E는 늘 한 직선에 놓이는가?

3) $\frac{SD}{SC}=\frac{2}{5}$로 되게 맞추면 중심닮음비 $\frac{SE}{SA}$는 얼마로 되겠는가?

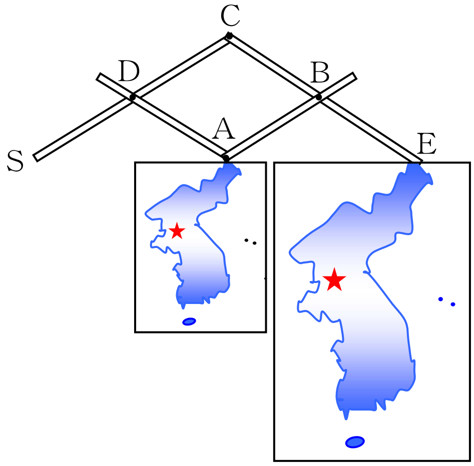


그림 1-37

3. 그림 1-38에서와 같이 두 지점 B와 C사이의 거리를 알아내기 위하여 AB=500m, AC=240m, ∠A=40° 를 재였다. 축척 1:10 000인 줄인 그림을 그리고 BC를 재여서 실제 거리를 구하여라. (10의 자리까지)

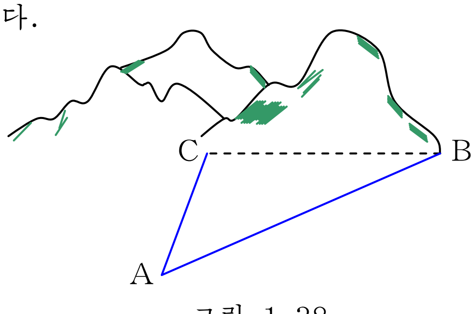


그림 1-38

4. 2등변3각형 ABC의 정점 A에서 그은 높이 AM, 밑변의 한 끝점 B에서 그은 높이를 BD라고 하면 △BCD∽△AMC이다. 증명하여라.

5. 원에 내접하는 4각형을 ABCD라고 하면 다음과 같은 관계가 성립한다.(톨레미의 정리)

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

를 증명하여라.

6. 웃 명제의 거꿀명제를 만들고 옳은가를 따져보아라.

7. 제형 ABCD(AD//BC)에서 두 대각선의 사귐점을 O라고 하자. 여기서 $CO:OA=0.3:\frac{2}{3}$이고 중간선의 길이가 29cm일 때 두 밑변을 구하여라.

8. 평행4변형 ABCD를 하나 그리고 정점 A를 지나며 변 BC와 사귀는 한 직선을 그어라. 이 직선이 대각선 BD, 변 BC, 변 DC의 연장선과 사귀는 점을 각각 M, N, P라고 하여라. 이 도형에서

   1) 닮은 3각형들을 모두 찾아라.　　　　2) MN:AM=AM:PM

   이다. 증명하여라.

9. △AOD에서 ∠AOD=90°, $AO=\frac{1}{3}OD$, 변 OD에 점 B, C를 OA=OB=BC=CD 되게 정하면 △BAC∽△BAD이라는것을 증명하여라.

10. 바른제형 ABCD(AD//BC)에서 AB:BC=1:2, ∠B=70°, BD=4cm이다. 이 제형을 그려라.

11. 뾰족3각형 ABC가 주어졌다. 직4각형 MNPQ를 그리는데 MN:NP=2:3이고 점 M은 변 AB, 변 NP는 변 BC에, 정점 Q는 변 AC에 놓이게 그려라.

12. △ABC에서 ∠A의 2등분선이 BC 및 외접원과 사귀는 점을 D, E라고 하면 AB·AC=AD·AE이다. 증명하여라.

13. △ABC의 밑변 BC의 한 점 P로부터 AB, AC에 각각 평행으로 PQ, PR를 긋고 AC, AB와의 사귐점을 각각 Q, R라고 하고 평행4변형 ARPQ를 만들 때 그 면적이 가장 크게 되는 점 P의 자리를 구하여라.

14. 바른3각형 ABC안의 임의의 점을 P라고 하고 점 P로부터 BC, CA, AB에 그은 수직선의 밑점을 각각 D, E, F라고 하자. 다음에 AP에 관하여 C와 같은쪽에 바른3각형 APQ를 만들고 다음의것을 증명하여라.

    1) BP=CQ

    2) ∠EFD+∠ACB=∠APB

    3) △DEF∽△CPQ

15. △ABC에서 ∠A안에 ∠BAX=∠YAC로 되도록 반직선 AX, AY를 긋고 AX가 △ABC의 외접원의 둘레와 사귀는 점을 Q, AY가 변 BC와 사귀는 점을 R라고 하면 AB·AC=AQ·AR임을 증명하여라.

제3절. 삼 각 비

1. 시누스

알아보기

α 가 커질 때 $\dfrac{BC}{AB}$ 의 값은 커지겠는가 작아지겠는가? 분모 AB의 길이를 정해놓고 생각하여보아라.

$\dfrac{BC}{AB}$ 의 값이 비탈진 정도를 나타낸다고 말할수 있는가? (그림 1-39)

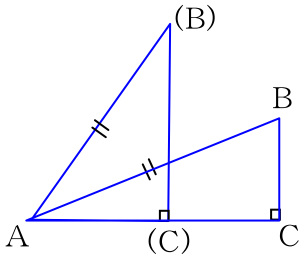
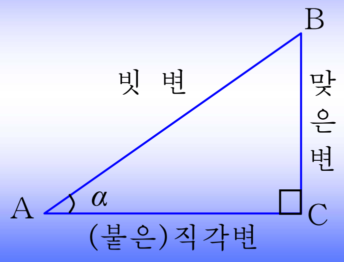


그림 1-39

> 직3각형에서 뾰족각 α 의 맞은변과 빗변과의 비
>
> $$\frac{\text{맞은변}}{\text{빗변}}$$
>
> 를 각 α 의 시누스라고 부르고 이것을
>
> $\sin\alpha$
>
> 와 같이 쓴다. 즉
>
> $$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$



문 제

1. 그림 1-40에서 원의 반경은 10cm, 한 눈금은 2mm이다.
   1) $\sin 20^\circ$, $\sin 70^\circ$ 의 값은 대략 얼마인가?
      그림을 보고 0.01의 자리까지 구하여라.
   2) $\sin\alpha$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$의 값은 1보다 작은 정수이다. 왜 그런가?
      α 가 0° 에서 90° 까지 커질 때 $\sin\alpha$ 의 값은 어떻게 변하는가?
2. 직3각형 MNP($\angle N=90^\circ$)에서 $\angle P=\alpha$ 일 때 $\sin\alpha$ 를 변들의 비로 표시하여라.

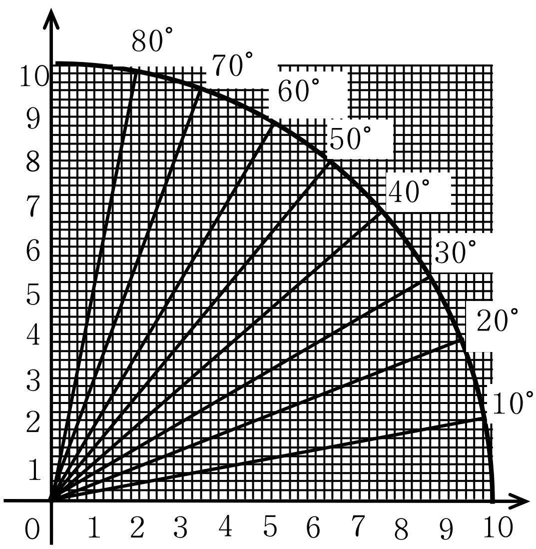


그림 1-40

례 높이가 15m인 나무가 23° 로 보였다.
나무꼭대기까지의 거리를 구하여라.

(풀이) $\sin 23° = \dfrac{AB}{OB}$

$OB = \dfrac{AB}{\sin 23°}$

$\sin 23°$ 를 찾으면 0.3907이다.

따라서

$$OB \approx \frac{17}{0.4} = 42.5(m)$$

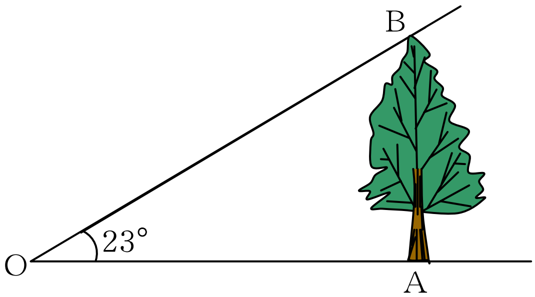


그림 1-41

문 제

1. 그림 1-42에서 ∠P=55°, NP=10cm일 때 MN의 길이는 얼마인가?
2. 그림 1-43에서 ∠B=35°, BC=50cm일 때 AC의 길이는 얼마인가?

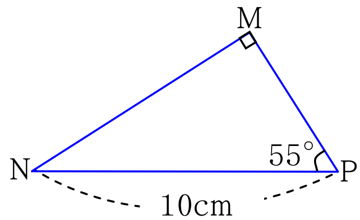


그림 1-42

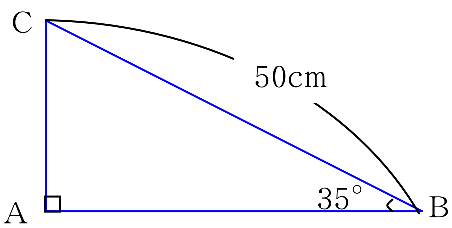


그림 1-43

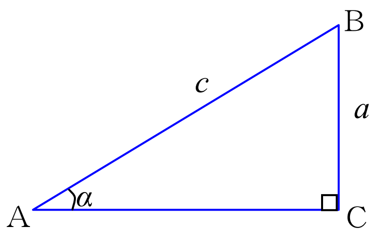


그림 1-44

3. 그림 1-44에서 $\alpha=25°$, a=20cm일 때 빗변 c의 길이를 구하여라.(cm로 0.01의 자리까지)
4. 기구가 바람에 의하여 25° 기울어졌다.(그림 1-45) 끈의 길이는 120m이다. 이 기구가 땅에서 얼마의 높이에 있겠는가?

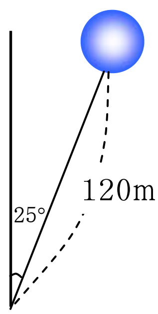


그림 1-45

2. 코시누스

직3각형에서 뾰족각 α에 붙은 직각변과 빗변과의 비

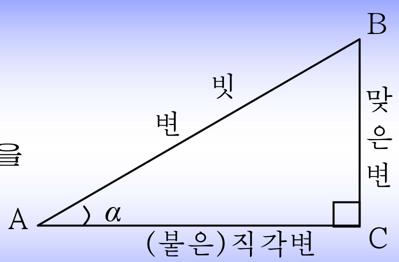
$$\frac{(붙은)직각변}{빗변}$$

을 각 α의 코시누스라고 부르고 이것을

$\cos\alpha$

와 같이 쓴다. 즉

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$



∠A의 시누스, 코시누스를 간단히 sinA, cosA와 같이 쓴다.

알아보기 1. 그림 1-46을 보고 sinA, cosA, sinC, cosC를 각각 변들의 비로 표시하여라. 이것들가운데 같은것이 있는가 알아보아라.

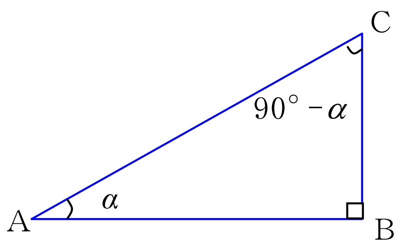


그림 1-46

2. $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$,
$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$
이다. 왜 그런가?
∠A+∠C=90° 라는것을 가지고 생각하여라.

두 뾰족각의 합이 90° 일 때 그 두 각을 서로 다른 각의 **남은각**이라고 부른다.

> 어떤 각의 시누스값은 그 남은각의 코시누스값과 같다.
> $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$, $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

문 제

1. 1) 그림 1-40을 보고 cos20°, cos50°, cos70°의 값을 구하여라. (0.01의 자리까지)

   2) $\cos\alpha$ $(0° < \alpha < 90°)$의 값은 1보다 작은 정수이다. 왜 그런가? α의 값이 0°에서 90°까지 커질 때 $\cos\alpha$의 값은 어떻게 변하는가?

2. 직3각형 MNP(∠N=90°)에서 ∠P=α일 때 $\cos\alpha$를 변들의 비로 표시하여라.

례 그림 1-47을 보고 포진지에서 비행기까지의 거리를 구하여라.

(풀이) 그림 1-47의 직3각형 AOB에서

$$\cos 38^\circ = \frac{OB}{AO}$$

$$AO = \frac{OB}{\cos 38^\circ} \approx \frac{2000}{0.788} \approx 2538(m)$$

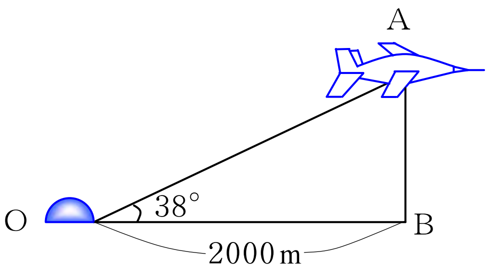


그림 1-47

문 제

1. 그림 1-48에서 ∠B=60°, BC=50㎝일 때 AB의 길이는 얼마인가?

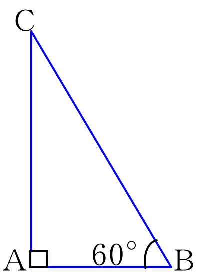


그림 1-48

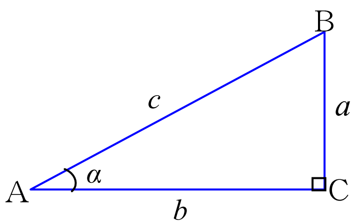


그림 1-49

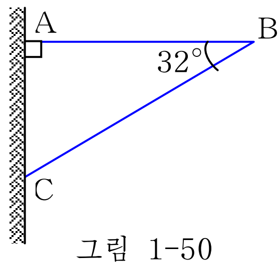


그림 1-50

2. 그림 1-49에서 α=35°, b=40㎝일 때 AB의 길이는 얼마인가?(0.1의 자리까지)
3. 벽에 수직인 틀 AB에 받침대 BC를 그림 1-50에서와 같이 대였다. AB=60㎝이고 ∠B=32°일 때 BC의 길이를 구하여라.

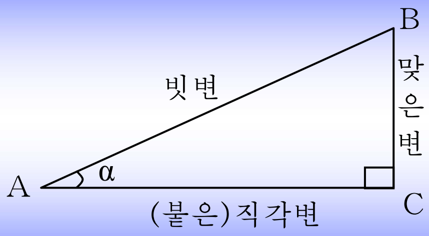
3. 탕겐스

직 3 각형의 뾰족각 α의 맞은변과 α에 붙은 직각변과의 비

$$\frac{\text{맞은변}}{\text{(붙은)직각변}}$$

를 각 α의 탕겐스라고 부르고 이것을 $\tan\alpha$와 같이 쓴다. 즉

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC}$$



문 제

1. 그림 1-40을 보고 tan20°, tan50°, tan70° 의 값을 구하여라.

2. α 의 값이 0° 에서 90° 까지 커질 때 tanα의 값은 어떻게 변하는가?

례 위대한 령도자 **김정일**대원수님의 현명한 령도에 의하여 건설된 주체사상탑의 높이는 170m이다. 그림 1-51에서 OB를 구하여라.

(풀이) 직3각형AOB에서

$$\tan 25° = \frac{AB}{OB}$$

$$OB = \frac{AB}{\tan 25°}$$

$$\approx \frac{170}{0.4663}$$

$$\approx 364.57(m)$$

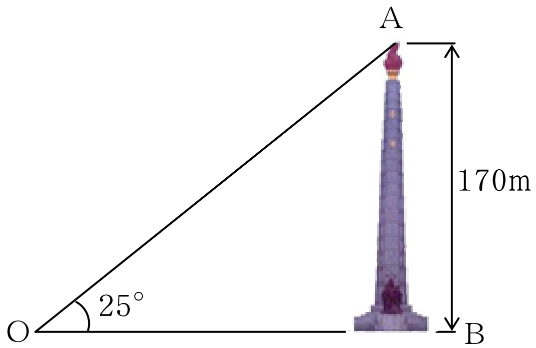


그림 1-51

문 제

1. 그림 1-52에서 ∠α 에 붙은 직각변 b=50㎝이고 ∠α 가 다음과 같을 때 맞은변 a의 길이는 얼마인가?

   1) 20° 2) 50° 3) 80°

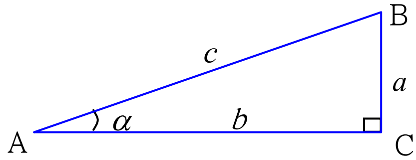


그림 1-52

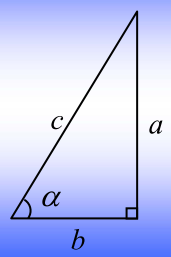
2. 호두나무의 그림자의 길이가 8m이고 나무의 꼭대기를 지나는 태양빛이 땅과 이루는 각이 58°였다. 나무의 높이를 구하여라.

시누스, 코시누스, 탕겐스를 통털어 삼각비라고 부른다.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad a = c\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad b = c\cos\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}, \quad a = b\tan\alpha$$



련습문제

1. 다음것을 구하여라.
   1) $\sin 42°$ 2) $\sin 58°$ 3) $\cos 73°$ 4) $\cos 65°$
2. α를 구하여라.
3. 1) $\cos\alpha=0.8059$ 2) $\sin\alpha=0.6046$
   3) $\cos\alpha=0.9664$ 4) $\sin\alpha=0.9573$
4. 반경이 10cm인 원에 내접하는 바른9각형의 한 변의 길이를 구하여라.
5. 반경이 10cm인 원에 내접하는 바른10각형의 둘레의 길이를 구하여라.
6. 경사각이 $21°$인 비탈길을 A에서 B로 똑바로 올라가는 길은 $46°$의 각을 이루고 비스듬히 20m만큼 올라갔다.(그림 1-53)
   1) 처음의 지점에서 몇m의 높이만큼 올라갔는가?
   2) 결국은 경사각이 몇도인 길을 올라갔는가?

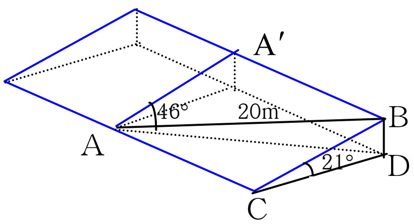


그림 1-53

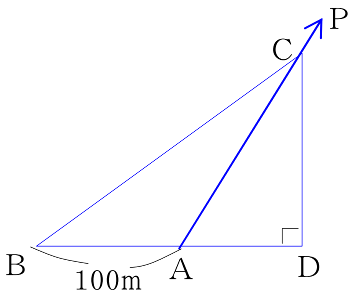


그림 1-54

7. 바람의 속도가 2.5m/s일 때 일정한 속도로 올라가는 풍선이 있다. 풍선을 올린 지점 A에서 바람이 불어오는 쪽으로 수평거리 100m인 지점 B에서 관측해보니 풍선이 지점 A를 떠난 다음 30초후에 올려본 각이 $40°$였다.
8. 그림 1-54의 AP는 풍선이 올라가는 방향, C는 30초후의 풍선의 위치를 나타내고있다. 다음 물음에 대답하여라.
   1) 30초 후에 풍선이 바람에 의하여 떠내려간 거리 AD를 구하여라.
   2) 30초 후의 풍선의 높이 CD를 구하여라.
   3) 풍선이 올라가는 속도를 구하여라.
   4) 이대로 계속 올라갈 때 지점 B에서 올려본 각이 $45°$로 되는것은 A를 떠난 다음 몇초후인가?
9. 그림 1-55는 지붕의 옆모양을 간단히 그린것이다.
   지붕물매가 $\angle\alpha=20°$이고 BD=18m일 때 AB의 길이를 구하여라.

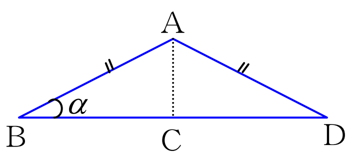


그림 1-55

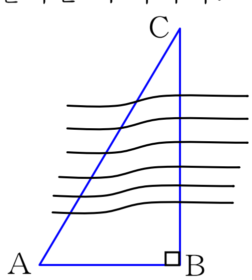


그림 1-56

10. 점 B에서 강건너편에 있는 점 C까지의 거리를 알기 위하여 ∠ABC=90° 로 되게 점 A를 정하고 ∠CAB의 크기와 AB의 길이를 재였다.(그림 1-56) ∠CAB=67°, AB=40m일 때 BC는 얼마인가?

복습문제

1. △ABC에서 AC에 평행인 직선이 변 AB와 사귀는 점을 D, BC와 사귀는 점을 E라고 할 때 AB=24cm, BC=32cm, AC=28cm, AD+CE=1.6cm이면 DE의 길이는 얼마인가?
2. 제형의 한 옆변을 4등분하고 매 등분점을 지나며 밑변에 평행인 직선을 다른 옆변과 사귈 때까지 그었다. 두 밑변이 각각 50cm 및 30cm일 때 옆변들사이에 있는 평행인 선분들의 길이를 구하여라.
3. 제형의 한 옆변을 n등분하고 그 매 등분점을 지나며 밑변에 평행인 직선을 다른 옆변과 사귈 때까지 그었다. 두 밑변이 a, $b(a<b)$일 때 두 옆변사이에 있는 평행인 선분들의 길이를 구하여라.
4. 직3각형 ABC(∠A=90°)의 변 AB, AC를 각각 한 변으로 하여 두 바른4각형 ABDE, ACFG를 그 3각형의 밖에 그리고 AB와 CD의 사귐점을 P, AC와 BF의 사귐점을 Q라고 하였다. 이때 AP와 AQ를 비교하여라.
5. △ABC의 변BC에 평행인 직선이 AB, AC와 사귀는 점을 각각 D, E라고 하고 BE와 CD의 사귐점을 P라고 하면 직선 AP는 변 BC의 가운데점을 지난다. 증명하여라.
6. △ABC의 정점 A, B, C와 임의의 점 O를 맺는 직선이 맞은변 BC, CA, AB 혹은 그 연장선과 사귀는 점을 각각 D, E, F라고 하면

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

이다. 증명하여라.(체바의 정리)
7. △ABC의 BC, CA, AB 혹은 그 연장선의 점을 각각 D, E, F라고 하자. 이 점들가운데 한개 또는 전체가 변에 있으며

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

이면 AD, BE, CF는 한 점에서 사귀든가 또는 서로 평행이다. 증명하여라.
8. 4각형ABCD의 변 AD, BC에 각각 점 P, Q를 잡을 때

$$AP:PD=BQ:QC=AB:CD$$

이면 직선 PQ는 AB, CD와 같은 각을 이룬다는것을 증명하여라.

9. 1) 제형 ABCD(AD//BC, 그림 1-57의 ㄱ)에서 변 AB에 AP:PB =m:n 으로 되게 점 P를 찍고 P를 지나며 밑변들에 평행인 직선을 그어 변 CD와 사귀는 점을 Q라고 하면

$$PQ = \frac{m\mathrm{BC}+n\mathrm{AD}}{m+n}$$

이다. 증명하여라.

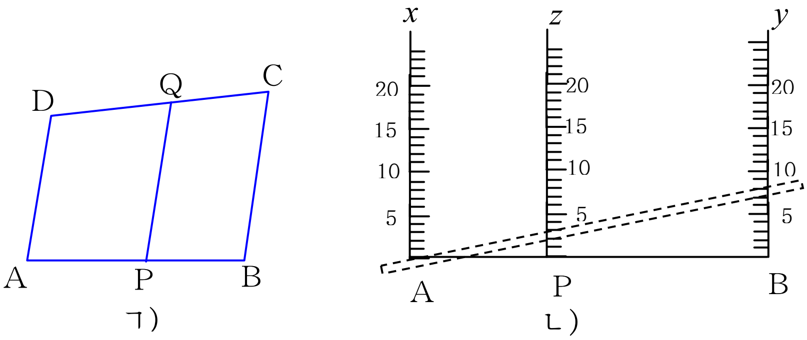


그림 1-57

2) 이 그림에서 BC=x, AD=y , PQ=z라고 놓으면 $z=\frac{mx+ny}{m+n}$를 얻는다.

이 식에서 m과 n을 미리 정해놓으면 x, y의 값에 따라서 그의 값을 구할수 있다. 그림 1-57의 ㄴ)는 이 원리를 써서 만든 계산도표이다.(여기서는 AP : PB = 2 :3)

x, y를 알고 도표에서 z를 구하는 방법을 설명하여라.

10. 한 기계부분품의 도면이 두개 있다. 첫째 도면 F는 늘인 그림인데 그 축척이 1:2이고 둘째 도면 F_1은 줄인 그림인데 그 축척은 1: 5이다. 도형 F에 대한 F_1의 닮음비를 구하여라.

11. 3각형 ABC의 변 BC에 2BD=DC인 점 D가 있다. ∠ABC=45° , ∠ADC=60° 일 때 ∠ACB를 구하여라.

12. △ABC의 두 높이를 BD, CF라고 하면 △ABD∽△ACF이다.증명하여라.

13. 은행나무의 그림자가 7m일 때 수직되게 세운 1m의 길이를 가진 말뚝의 그림자는 0.5m였다. 그 나무의 높이를 구하여라.

14. 바른 5각형 ABCDE에서 정점 A로부터 직선 CD에 그은 수직선을 AF(밑점 F)라고 하고 직선 BC에 그은 수직선을 AG(밑점 G)라고 하면

$$\triangle AGB \backsim \triangle AFD$$

이다. 증명하여라.

15. △ABC의 변 BC에 한 점 D를 찍었는데 AD에 의하여 나누이는 두 3각형이 닮았다고 한다. 이때 △ABC는 직3각형 또는 2등변3각형이라는것을 증명하여라.
16. 원에서 두 활줄 AB와 CD가 사귀는 점을 M이라고 하면 △ACM∽△DBM이다. 증명하여라.
17. 원밖의 한 점 M에서 접선 MC(접점 C)와 가름선 MAB(사귐점 A, B)를 그으면 △MAC∽△MCB이다. 증명하여라.
18. 가로, 세로의 비가 3:2이고 대각선의 길이가 4cm인 직4각형을 그려라.
19. 4각형 ABCD에서 두 대각선의 사귐점을 I, 점 A를 지나며 BC에 평행인 직선이 BD와 사귀는 점을 K, 점 B를 지나며 AD에 평행인 직선이 AC와 사귀는 점을 L이라고 한다.
 1) IA, IK, IB, IC사이에 어떤 비례식이 성립하는가?
 2) IC, IK, ID, IL사이에 어떤 비례식이 성립하는가?
 3) LK//CD라는것을 증명하여라.
20. 점 T에서 서로 외접하는 두 원 A(4cm)와 B(3cm)가 있다. 점 T를 지나는 두 직선을 긋고 그 직선들이 각각 두 원둘레와 다시 사귀는 점을 E, F 및 L, M이라고 한다.
 1) △TAL은 △TBM과 어떤 관계를 가지는가?
 2) TL과 TM의 비, TE와 TF의 비를 구하여라.
21. 그림 1-58과 같은 △ABC의 밑변 BC에서 점 D를 잡고 이 점을 지나 변 AB, AC에 평행선을 그었을 때 변 AC, AB와의 사귐점을 각각 M, N이라고 하자. 이때 △ABC의 면적을 S, 선분 BD의 길이를 x라고 한다.
 1) 평행4변형 DMAN의 면적을 y라고 하고 y를 x의 식으로 표시하여라.
 2) 점 D의 위치를 어떻게 잡을 때 y가 최대로 되겠는가?

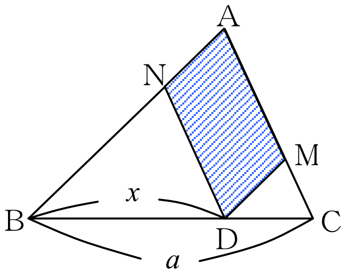


그림 1-58

22 1) △ABC에서 높이 AH=4cm, BC=6cm, AB=5cm이다. 이 3각형을 그려라.
 2) 1)에서 직4각형 DEFG의 정점 E는 변 AB에, F는 변 AC에, G와 D는 변 BC에 놓여있다. AE=$x$cm라고 하고 변 EF와 ED의 길이를 x로 표시하여라.
 3) 이때 직4각형 EFGD의 둘레의 길이와 면적을 구하여라.
 4) 그 면적이 가장 커지는 x의 값을 구하여라.
 5) EFGD가 바른4각형으로 되는 x의 값을 구하여라.
23. 영웅적조선인민군의 한 해안방어진지에서 철천지원쑤 미제의 간첩선을 단발에 격침시켰다. 이때 진지의 높이는 바다기준 150m, 내려다보는 각은 8°였다고 한다. 진지로부터 간첩선이 격침된 곳까지의 수평거리를 구하여라.(그림 1-59)

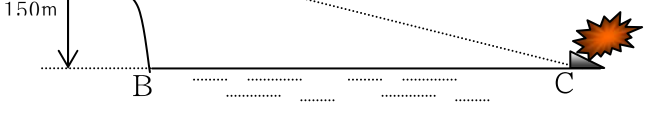


그림 1-59

24. 한 변이 6cm인 바른10각형의 내접원과 외접원의 반경을 구하여라.(1mm의 자리까지)

25. 직3각형 ABC(∠A = 90°)를 BC=3AC=6cm로 되게 그리고 높이 AD를 그어라. 이때

1) cosC를 구하여라.

2) 선분 AC와 CD의 비, 선분 AB와 AD의 비를 구하여라.

26. 직3각형ABC(∠A = 90°)에서 높이 AD를 그었다. AB=m・BD(m>1)일 때 AB와 BC의 비, AC와 AD의 비를 구하여라.

27. 그림 1-60과 같이 지점 A, D에서 나무의 꼭대기 C를 올려다보는 각은 각각 31°, 14° 였다. AD=96m일 때 강의 너비 AB를 구하여라.

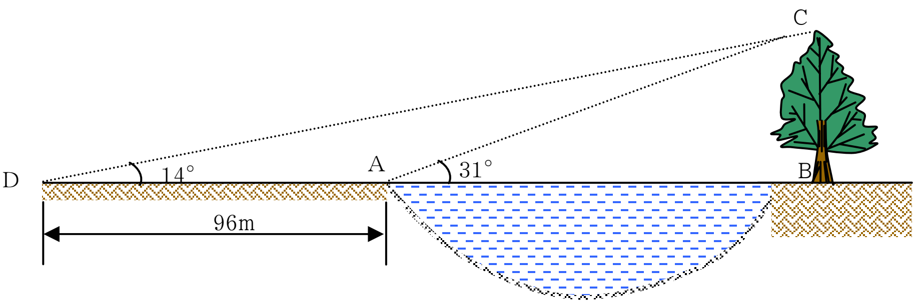


그림 1-60

28. 다음과 같은 뾰족각 α가 있을 때 x는 어떠한 범위에 있는 수인가?

1) $\sin\alpha=\dfrac{x-8}{7}$ 2) $\cos\alpha=\dfrac{x^2}{9}$

3) $\sin\alpha=\dfrac{|x|}{9}$ 4) $\tan\alpha=\dfrac{5-x\sqrt{3}}{4}$

29. 4각형 ABCD에서 만들어진 각들이 다음과 같다. (그림 1-61)

∠ABC=∠ACD=90° , ∠CAB=45° , ∠CAD=30°

점 D에서 AB에 그은 수직선을 DE, 점 C에서 DE에 그은 수직선을 CF, AD=10cm라고 할 때 다음 식과 글에서 □안에 알맞는 수를 써넣어라.

1) CD=□cm, AC=□cm, BC=□cm, AB=□cm

2) 4각형 ABCD의 면적은 □cm^2이다.

3) ∠CDF=□° 이므로 DF=□cm

4) 1), 2), 3)의 결과로부터 sin75° =□, cos75° =□

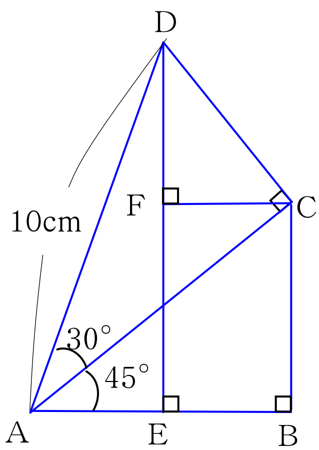


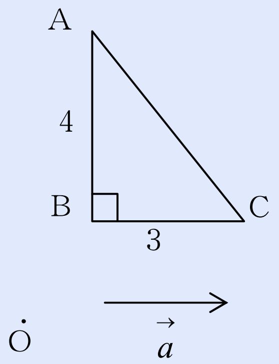
그림 1-61

연 구

그림과 같이 직각변의 길이가 3, 4인 직3각형 ABC와 점 O, 벡토르 $\vec{a}$가 주어졌다.

1) △ABC에 중심닮음변환 (2.5, O)을 실시하여 $\triangle A_1B_1C_1$를 얻은 다음 $\triangle A_1B_1C_1$에 평행이동 $\vec{a}$를 실시하여 $\triangle A_2B_2C_2$를 구하여라.

2) △ABC를 중심닮음변환하여 $\triangle A_2B_2C_2$를 얻을수 있는가?
이때 (k, O)의 k를 구하여라.



상 식

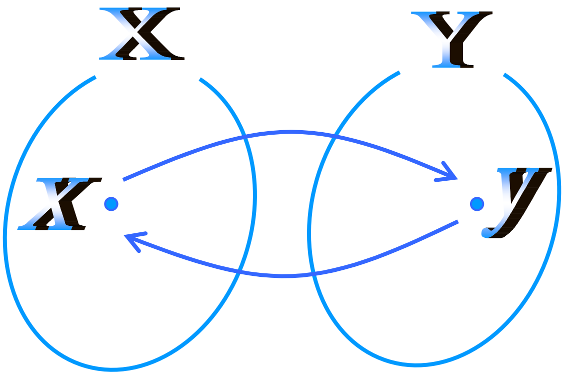
피다고라스와 《피다고라스학파》

우리는 기하학이라고 하면 피다고라스정리(세평방정리)를 특별히 생각하게 된다.

피다고라스(B.C.570-B.C.500)는 기하학건설에서 공적을 남긴 고대 그리스의 수학자이다. 그는 《피다고라스학파》를 조직하고 운영하였는데 《피다고라스학파》가 수학에 남긴 업적은 다음과 같다.

1) 기하학에서 증명을 체계적으로 도입하고 기하학을 과학으로 건설한것
2) 직선도형에 대한 평면기하학을 건설한것
3) 피다고라스정리(세평방정리)를 증명한것
4) 닮음도형에 대한 연구를 처음으로 진행한것
5) 몇개의 바른다각형과 바른다면체의 그리기법을 창안한것

제2장. 함수



함수와 거꿀함수

분수함수와 무리함수

제곱과 제곱함수

$$y=\frac{2x-1}{x+1}$$

제1절. 함수와 거꿀함수

1. 넘기기와 함수

찾 기 다음 그림에 표시한 대응규칙 f, g, h, k가운데서 모임 X의 매개 원소에 Y의 꼭 하나의 원소가 대응하는것은 어느것인가?

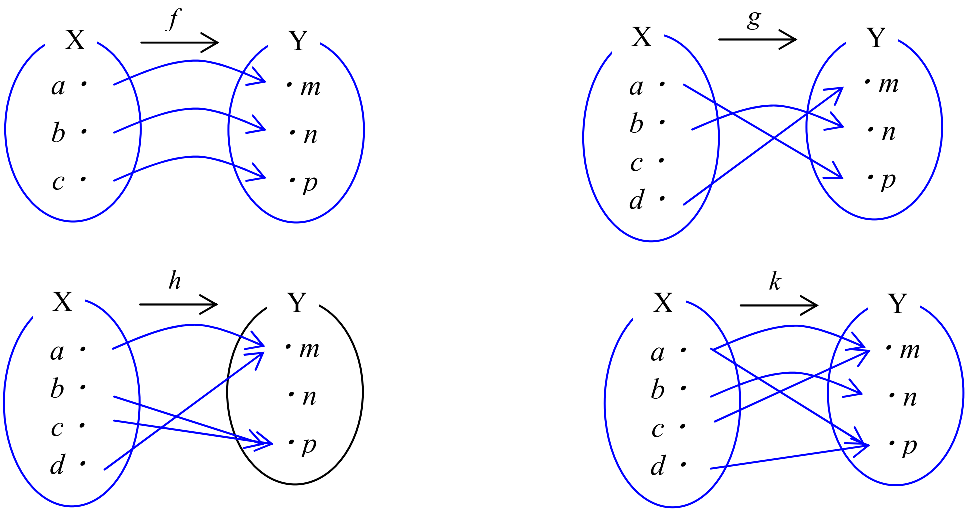


그림 2-1

어떤 규칙 f에 의하여 모임 X의 매개 원소에 모임 Y의 꼭 하나의 원소가 대응하면 이 규칙 f 를 X를 Y로 보내는 넘기기라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$f: X \to Y \text{ 또는 } X \xrightarrow{f} Y$$

특히 수모임을 수모임으로 보내는 넘기기를 함수라고 부른다.

문 제

1. 우의 찾기에서 어느 대응규칙이 넘기기인가?

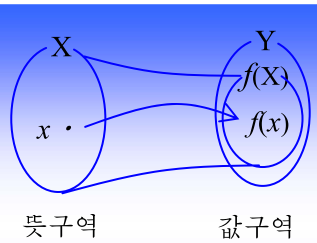
2. 두 모임 X={1, 2, 4}, Y={1, 2, 3, 4}가 주어졌다.

   X의 매개 수에 Y에 속하는 그의 약수를 대응시키는 규칙을 f로 표시할 때

   1) 대응규칙 f를 화살그림으로 표시하여라.

   2) f는 넘기기인가?

넘기기 f: X→Y에서 모임 X의 원소 x에 모임 Y의 원소 y가 대응하면 y를 넘기기 f에 의한 x의 영상, x를 y의 원상이라고 부르고 다음과 같이 표시한다.



$$y=f(x), \ f: x \to y$$

그리고 X를 넘기기 f의 뜻구역, $f(\mathrm{X})=\{f(x) \mid x \in \mathrm{X}\}$를 넘기기 f의 값구역(**X**의 영상)이라고 부른다.

함수에 대해서는 영상을 함수값이라고 부른다.

앞으로 함수에 대해서는 Y=f(X)인 경우만 고찰한다.

문 제

1. 원둘레 X의 매개 점에 선분 Y(선분 AB)의 점을 그림에서와 같이 대응시키는 규칙을 f라고 하자.
   1) X의 점 K, S, N에 대응하는 Y의 점을 각각 구하여라.
   2) Y의 점 D는 X의 어느 점에 대응하는가?
   3) f는 X를 Y로 보내는 넘기기인가?

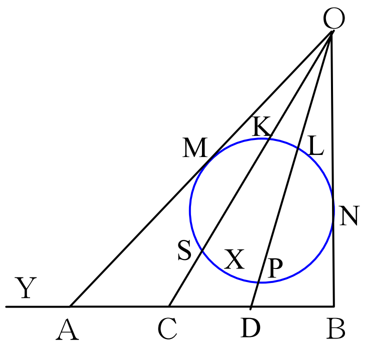


그림 2-2

2. 다음 규칙들가운데서 수모임을 수모임으로 보내는 넘기기는 어느것인가?
   1) f는 바른4각형에 그 면적을 대응시키는 규칙이다.
   2) g는 옹근수모임 의 매개 수에 그 수를 5로 나눈 나머지를 대응시키는 규칙이다.
3. 다음 그림에 표시한 두 넘기기 f와 g에 대하여
   1) f와 g의 뜻구역을 각각 구하여라.
   2) f와 g의 값구역을 각각 구하여라.

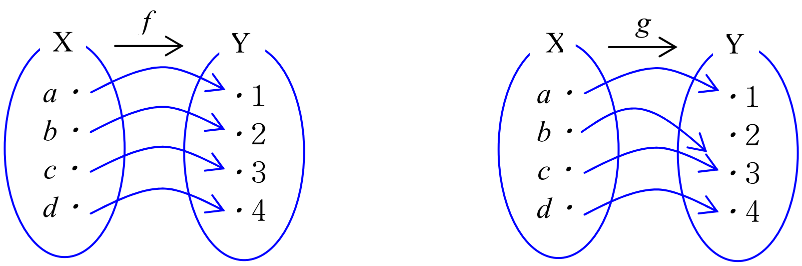


그림 2-3

찾기 그림 2-3에 표시한 넘기기에서 Y의 매개 원소가 각각 몇개의 원상을 가지는가?

> 넘기기 f:X→Y에서 모임 Y의 매개 원소가 꼭 하나의 원상을 가지면 이 넘기기를 1대1넘기기라고 부른다.

문 제

1. X={-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}을 Y={0, 2, 4, 6}으로 보내는 넘기기 f가 다음의 표로 주어졌다.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	6	4	2	0	2	4	6

1) 넘기기 f의 뜻구역과 값구역을 구하여라.

2) f는 1대1넘기기인가?

2. x∈R일 때 넘기기 $x \xrightarrow{f} x$에 대하여

1) 값구역을 말하여라.

2) f가 1대1넘기기라는것을 설명하여라.

3. 3각형에 그 면적을 대응시키는 넘기기는 1대1넘기기인가? 왜 그런가?

4. 다음 식으로 표시되는 함수의 뜻구역은 어떤 수모임인가?

1) $4-5x$　　2) $\dfrac{3}{x+2}$　　3) $\sqrt{4x-7}$

5. 다음 수모임을 뜻구역으로 가지는 함수 $f(x)$=2-3x의 값구역을 구하여라.

1) $x=\left\{-3,\ -2,\ 0,\ 2,\ \dfrac{2}{3},\ 4\right\}$　　2) $[-7,\ 0]$

3) $[2,\ 100]$　　4) $(-\infty,\ 0]$　　5) $(-\infty,\ +\infty)$

6. 함수는 ( )가 정해지면 완전히 정해진다.

1) 뜻구역　2) 값구역　3) 대응규칙,　값구역　4) 대응규칙, 뜻구역

7. 다음 그림에서 함수의 그라프로 되는것은 ( )이다.

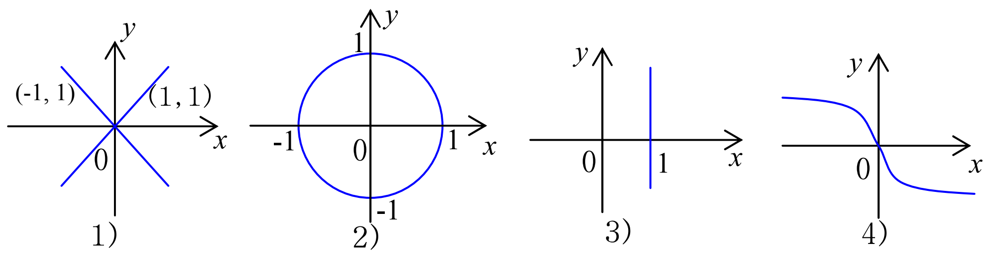


그림 2-4

2. 거꿀넘기기와 거꿀함수

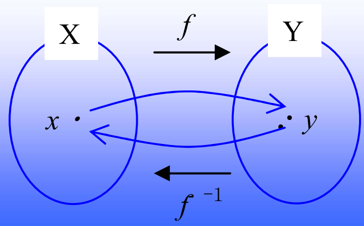
해보기 1대1넘기기 f: X→Y에서 언제나 Y의 매개 원소에 그 원상을 대응시키는 새로운 넘기기를 생각할수 있는가?

1대1넘기기 f : X→Y에서 Y의 매개 원소에 그 원상을 대응시키는 넘기기를 f의 거꿀넘기기라고 부르고

$$f^{-1}: \mathrm{Y} \to \mathrm{X},\quad x = f^{-1}(y)$$

로 표시한다. (f를 f^{1}의 원넘기기)

특히 f가 함수이면 그 거꿀넘기기를 함수 f의 거꿀함수라고 부른다. (f를 f^{-1}의 원함수라고 부른다.)



독립변수를 x, 종속변수를 y로 표시하는 관례에 따라 거꿀함수 $x=f^{-1}(y)$를 보통 $y=f^{-1}(x)$로 쓴다.

문 제

1. 선분 AB를 선분 CD로 보내는 넘기기가 그림 2-5와 같이 주어졌다. 이 넘기기의 거꿀넘기기가 있겠는가?

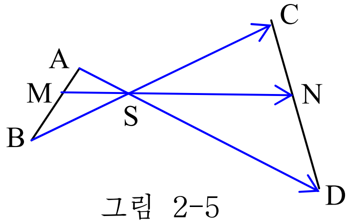


그림 2-5

2. 매개 다각형에 그 아낙각의 합을 대응시키는 넘기기에 거꿀넘기기가 있겠는가?
3. 함수 f의 독립변수와 종속변수는 거꿀함수 f^{-1}에서 각각 어떤 역할을 하게 되는가? 또 f의 뜻구역, 값구역은 어떤가?
4. 원의 면적은 반경의 함수이다. 이 함수를 f라고 할 때 f^{-1}가 있겠는가?

$$f(1),\ f(2),\ f^{-1}(3),\ f^{-1}(x)$$

을 구하여라.

5. 함수 $f(x)=3x$, $x\in\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에서
   1) f의 값구역, 뜻구역을 구하여라.
   2) f의 거꿀함수 f^{-1}가 있겠는가? 왜 그런가?
   3) $f^{-1}(6)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(-3)$을 구하여라.

6. 함수 $y=f(x)$에 대하여 y의 매개 값에 꼭 하나의 x의 값이 대응하면 이 함수는 거꿀함수가 있다고 말할수 있는가? 왜 그런가?

해보기 함수 $y=x+1$, $y=x^2$, $y=|x|$, $y=\sqrt{x}$에 대하여

1) 거꿀함수가 있는가 없는가를 그라프를 보면서 찾아보아라.

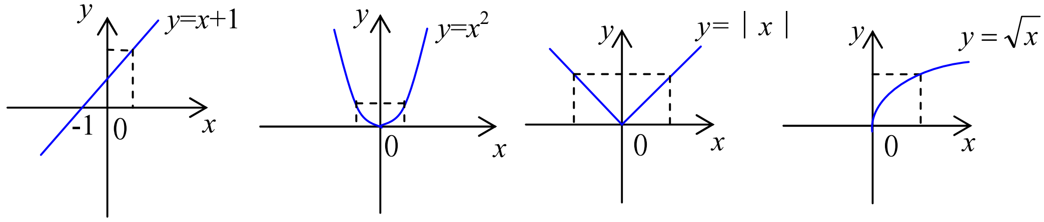


그림 2-6

2) 우의 함수들가운데서 증가만 하거나 감소만 하는 함수는 어느것인가? 그 함수에 대해서는 거꿀함수가 있는가?

> 함수 $y=f(x)$가 증가만 하거나 감소만 하면 $y=f(x)$의 거꿀함수가 있다.

찾기 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{4}$에 대하여

1) f^{-1}이 있다. 왜 그런가?

2) $f^{-1}(10)$, $f^{-1}(-2)$를 구하여라. 어떤 계산을 해야 하는가?

3) f^{-1}를 식으로 표시하여라.

4) 함수 $y=f(x)$의 거꿀함수를 $y=f^{-1}(x)$ 모양으로 구하자면 어떻게 해야 하는가? 그 방법을 설명하여라.

함수 $f(x)$가 x에 관한 식이고 함수 $y=f(x)$에 거꿀함수가 있을 때 이 거꿀함수는 다음과 같이 구한다.

> 원함수 거꿀함수
> $y=f(x) \rightarrow x=f^{-1}(y) \rightarrow y=f^{-1}(x)$
> (x에 관하여 푼다.) (x와 y를 서로 바꾼다.)

례 함수 $y=1-\dfrac{x}{2}$의 거꿀함수를 구하여라.

(풀이) 주어진 함수는 뜻구역에서 감소하므로 거꿀함수를 가진다.

$y=1-\dfrac{x}{2}$를 x에 관하여 풀면 $x=2-2y$

x와 y를 바꾸면 거꿀함수 $y=2-2x$를 얻는다.

문 제

1. 함수 $y=3x+2$에 대하여

   1) 거꿀함수를 구하여라.

   2) 먼저 x와 y를 서로 바꾸고 다음에 y에 관하여 풀어도 거꿀함수가 나오는가?

2. 다음 함수의 거꿀함수를 구하여라.

   1) $y=\dfrac{x-5}{3}$ 　　　　　　　2) $y=\dfrac{x+5}{3x-1}$ $(x\in[1, 10])$

   3) $y=x^2-2x+1$ $(x\geq 1)$ 　　　　4) $y=|x|$ $(x\geq 0)$

알아보기 그림 2-7을 보고 자리표평면에서 점 $M(x, y)$는 직선 $y=x$에 관한 대칭이동에 의하여 점 $M_1(y, x)$로 넘어간다는것을 알아보아라.

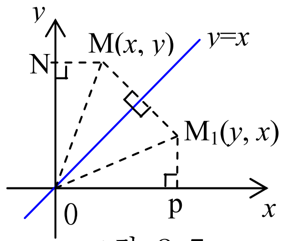


그림 2-7

함수 $y=x^2(x\geq 0)$ 의 거꿀함수를 구하고 그라프를 그려보자.

함수 $y=x^2(x\geq 0)$은 구간 $[0, +\infty)$에서 증가하므로 거꿀함수를 가진다.

$y=x^2$을 x에 관하여 풀면 $x=\pm\sqrt{y}$

그런데 $x\geq 0$이므로 $x=\sqrt{y}$

따라서 거꿀함수는 $y=\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$

$y=\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$의 그라프를 그리자.

$x\geq 0$이므로 $y\geq 0$이다.

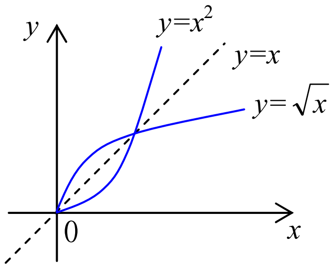


그림 2-8

$y=\sqrt{x}$의 두변을 2제곱하면 $y^2=x$

이것은 원점을 지나고 x축에 관하여 대칭인 포물선이다.

그런데 $x\geq 0$, $y\geq 0$이므로 그라프는 1사분구의 포물선이다.

함수 $y=\sqrt{x}$의 그라프는 1사분구에서 $y=x^2$의 그라프와 직선 $y=x$에 관하여 대칭이라는것을 알수 있다.

> 함수 $y=f(x)$와 그 거꿀함수 $y=f^{-1}(x)$의 그라프는 직선 $y=x$에 관하여 서로 대칭이다.

문 제

1. 다음 함수의 거꿀함수를 구하고 그라프를 그려라.

   1) $y=\begin{cases}2x-1 & x\in[-2,\ 0]\\ \dfrac{1}{2}x-1 & x\in(0,\ 2]\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in[0,\ +\infty)\\ -x^2 & x\in(-\infty,\ 0)\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}3 & (x=-1)\\ 0 & (x=0)\\ -6 & (x=2)\\ 9 & (x=-3)\end{cases}$ 의 거꿀함수를 구하고 그의 그라프를 구하여라.

3. 다음 함수들의 그라프는 직선 $y=x$에 관하여 대칭이다. 왜 그런가?

   1) $y=4x+9$, $y=\dfrac{x-9}{4}$ 2) $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$, $y=2x+3$

4. 다음 명제에서 옳은것과 옳지 않은것을 가려내여라.

   1) $y=f^{-1}(x)$의 거꿀함수는 $y=f(x)$이다.

   2) $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그라프는 직선 $y=x$에 관하여 대칭이므로 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그라프는 서로 사귈수 없다.

   3) $y=x$에 관하여 대칭인 두개의 그라프는 반드시 서로 거꿀인 두 함수의 그라프이다.

   4) $f^{-1}(x)$의 뜻구역안의 임의의 하나의 값 x_0에 대하여 $f[f^{-1}(x_0)]=x_0$이다.

3. 짝함수와 홀함수

찾기 다음 함수들가운데서 조건 $f(-x)=f(x)$ 또는 $f(-x)=-f(x)$에 맞는것을 찾아내여라.

1) $f(x)=x^3$ 2) $f(x)=x^2+3x-2$ 3) $f(x)=x^5-3x$

4) $f(x)=x^4-x$ 5) $f(x)=2x^6-3x^4+5$ 6) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

뜻구역의 모든 점에서

1) 늘 $f(-x)=f(x)$가 성립하면 함수 f를 짝함수라고 부른다.

2) 늘 $f(-x)=-f(x)$가 성립하면 함수 f를 홀함수라고 부른다.

례 1 $y=x^2$은 $(-\infty,\ +\infty)$에서 $(-x)^2=x^2$이므로 짝함수이다.

$y=x^3$은 $(-\infty,\ +\infty)$에서 $(-x)^3=-x^3$이므로 홀함수이다.

례 2 $y=x^2-2x+1$은 $(-\infty,\ +\infty)$에서

$f(-x)=(-x)^2-2(-x)+1=x^2+2x+1$ 이므로

$f(-x)\neq f(x),\quad f(-x)\neq -f(x)$

따라서 주어진 함수는 짝함수도 홀함수도 아니다.

문 제

1. $x=[-3,\ 5]$에서 주어진 두 함수 $y=3x^4,\ y=x^3$은 다 짝함수도 홀함수도 아니다. 왜 그런가? 또 뜻구역이 다같이 $[-10,\ 10]$일 때는 어떤가?

2. 다음 함수들가운데서 짝함수인것, 홀함수인것을 가려내여라.

   1) $y=|x|+1$ 2) $y=2x^3-x$ 3) $y=x^2+x-5$ 4) $y=\dfrac{5x^4}{x^2-3}$

   5) $y=\dfrac{1}{x-3x^3}$ 6) $y=\dfrac{|1-x^2|}{3-|x|}$ 7) $y=\sqrt{1+x^2}+5$ 8) $y=x\sqrt{4-x^2}$

3. 두 짝함수의 합은 짝함수라는것을 증명하여라.

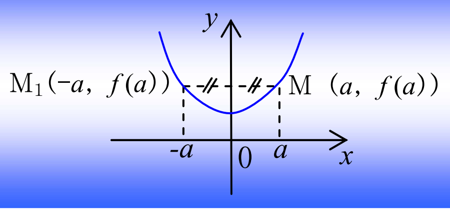
4. 두 홀함수의 합은 홀함수라는것을 증명하여라.

해보기 짝함수 $y=f(x)$에 대하여

1) 점 $(5,\ f(5))$가 f의 그라프에 들면 점 $(-5,\ f(5))$도 이 그라프에 든다. 왜 그런가? 또 그 두 점은 서로 어떤 관계에 있는가?

2) 점 $(a,\ f(a))$와 점 $(-a,\ f(a))$은 어느 축에 관하여 대칭인가?

짝함수의 그라프는 y축에 관하여 대칭이다.

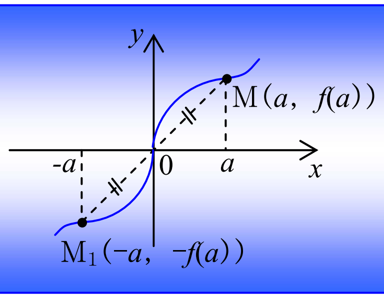


해보기 홀함수 $y=f(x)$에 대하여

1) 점 $(5,\ f(5))$가 f의 그라프에 들면 점 $(-5,\ -f(5))$도 이 그라프에 든다. 왜 그런가? 또 그 두 점은 서로 어떤 관계에 있는가?

2) 점 $(a,\ f(a))$와 점 $(-a,\ -f(a))$는 어느 점에 관하여 대칭인가?

홀함수의 그라프는
원점에 관하여 대칭이다.



문 제

1. 다음 함수들가운데서 y축에 관하여 대칭인것과 자리표원점에 관하여 대칭인것을 가려내여라.

   1) $y = 3 - 2x^2$　　2) $y = \dfrac{2x}{x^3 - x}$　　3) $y = |x^3| + 1$　　4) $y = -(x+1)^3$

2. 다음과 같이 말하면 옳은가?

   1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$ 는 홀함수이다.　　2) $f(x) = (1-x)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 는 짝함수이다.

   3) $f(x)=1$은 홀함수이고 짝함수이다.

   4) $f(x) = x^3 - x - 1$은 짝함수도 아니고 홀함수도 아니다.

4. 함수의 그라프변환

1) 평행이동

찾 기　1. 1) 함수 $y = x^2 + 5$ 의 그라프는 $y = x^2$ 의 그라프를 어떻게 이동하여 얻었는가?

2) $y = f(x) = x^2$ 일 때 함수 $y = x^2 + 5$ 를 $y = f(x)$ 에 관하여 표시하면 $y = f(x) + 5$라고 말할수 있는가?

3) $y = f(x) + 5$ 의 그라프는 $y = f(x)$ 의 그라프를 어떻게 이동하여 얻을수 있겠는가?

2. 1) 함수 $y = (x-2)^2$ 의 그라프는 $y = x^2$ 의 그라프를 어떻게 이동하여 얻었는가?

2) $y = f(x) = x^2$ 일 때 $y = (x-2)^2$ 을 $y = f(x)$에 관하여 표시하여라.

3) $y = f(x-2)$ 의 그라프는 $y = f(x)$ 의 그라프를 어떻게 이동하여 얻을수 있겠는가?

1. 함수 $y=f(x)+n$의 그라프는 $y=f(x)$의 그라프를 y축의 정방향으로 n만큼 평행이동하여 얻는다.
2. 함수 $y=f(x-m)$의 그라프는 $y=f(x)$의 그라프를 x축의 정방향으로 m만큼 평행이동하여 얻는다.

례 1 $y=\sqrt{x}+2$ 의 그라프는 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 y축의 정방향으로 2만큼 평행이동하면 얻어진다.

례 2 $y=\sqrt{x+2}$ 의 그라프는 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 x축의 정방향으로 -2만큼 평행이동하면 얻어진다.

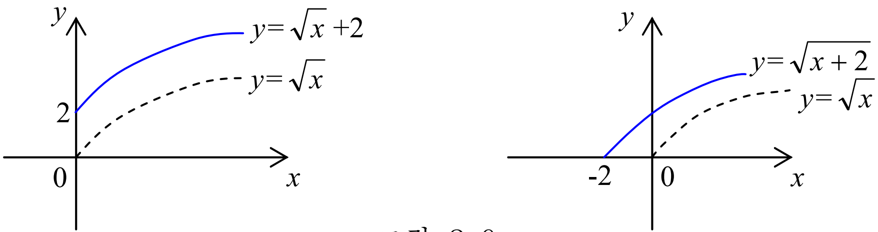


그림 2-9

문 제

1. 다음 함수의 그라프를 y축의 정방향으로 3, -2만큼 각각 평행이동하면 어떤 함수의 그라프를 얻겠는가?

   1) $y=0.5x$ 2) $y=\sqrt{x}$ 3) $y=3x^2+6x+1$

2. 다음 함수의 그라프를 x축의 정방향으로 2, -2만큼 각각 평행이동시키면 어떤 함수의 그라프가 얻어지는가?

   1) $y=1-3x$ 2) $y=-x^2$ 3) $y=x^3$ 4) $y=|x|$

3. $y=3x^2-1$의 그라프를 어떻게 이동하여야 다음 함수의 그라프를 얻게 되는가?

   1) $y=3x^2$ 2) $y=3x^2+1$

4. $y=(2x-3)^2$의 그라프를 얻자면 $y=4x^2$의 그라프를 어떻게 이동시켜야 하는가?

찾 기 1. 함수 $y=(x+3)^2-1$의 그라프는 $y=x^2$의 그라프를 어떻게 이동하여 얻었는가?

2. $y=f(x)=x^2$일 때 함수 $y=(x+3)^2-1$을 $y=f(x)$에 관하여 표시하여라.

함수 $y=f(x-m)+n$의 그라프는 $y=f(x)$의 그라프를 x축의 정방향으로 m만큼 평행이동한 다음 y축의 정방향으로 n만큼 평행이동하여 얻는다.

문 제

1. 다음 함수의 그라프를 $y=x^2$, $y=|x|$ 의 그라프를 이동하는 방법으로 대강 그려보아라.

1) $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3$　　2) $y=(5-x)^2-2$　　3) $y=|x-3|+2$

2. 그림 2-10에서 포물선 G_1, G_2, G_3 은 각각 어떤 함수의 그라프인가?

3. 함수 $y=x^3$의 그라프로부터 다음 함수의 그라프를 어떻게 얻을수 있겠는가?

1) $y=x^3-5$　　2) $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+3$

4. 함수 $y=f(x)$의 그라프를 y축에 $m<0$일 때 아래로 평행되게 $|m|$만큼 이동하면 (　)그라프가 얻어진다.

1) $y=f(x)+m$　　2) $y=f(x)-m$

3) $y=f(x)+|m|$　　4) 확정할수 없다.

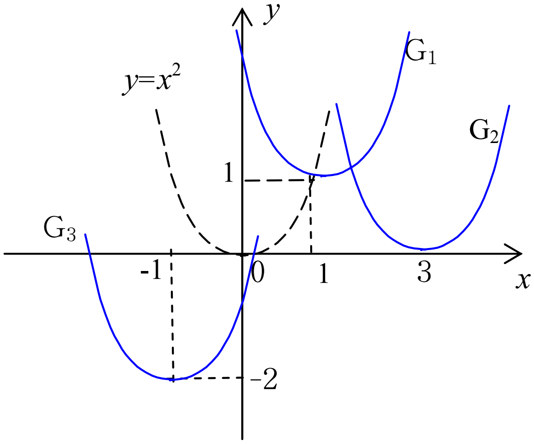


그림 2-10

5. 함수 $y=f(x)$의 그라프를 y축에 평행되게 $|m|$만큼 우로 평행이동하면 (　)가 얻어진다.

1) $y=f(x-m)$의 그라프　　3) $y=f(x+m)$의 그라프

2) $y=f(x)+|m|$의 그라프　　4) $y=f(x-|m|)$의 그라프

2) 대칭이동

알아보기

1. 함수 $y=2x^2$의 그라프를 어떻게 이동하면 $y=-2x^2$의 그라프를 얻을수 있겠는가?

2. $y=x-2$의 그라프를 y축에 관하여 대칭이동하면 어떤 함수의 그라프가 얻어지겠는가?

3. 함수 $y=f(x)$의 그라프로부터 함수 $y=-f(x)$, $y=f(-x)$의 그라프를 각각 얻자면 어떻게 하면 되겠는가를 생각하여보아라.

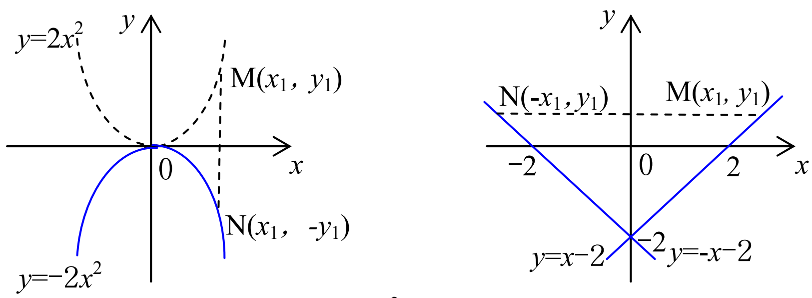


그림 2-11

1. 함수 $y=f(x)$의 그라프를 x축에 관하여 대칭이동하면 함수 $y=-f(x)$의 그라프를 얻는다.
2. 함수 $y=f(x)$의 그라프를 y축에 관하여 대칭이동하면 함수 $y=f(-x)$의 그라프를 얻는다.

문 제

1. 다음 함수의 그라프를 x축에 관하여 대칭이동하면 어떤 함수의 그라프를 얻게 되는가?

   1) $y=1-3x$ 2) $y=x^3$ 3) $y=x^2-8x+16$ 4) $y=|x-3|$

2. 다음 함수의 그라프를 y축에 관하여 대칭이동하면 어떤 함수의 그라프를 얻게 되는가?

   1) $y=-x+2$ 2) $y=2(x-2)^2$ 3) $y=x^2-2x+3$

3. 함수 $y=2x^2$의 그라프를 어떻게 이동하면 다음 함수의 그라프를 얻을수 있는가?

   1) $y=-2(x-3)^2$ 2) $y=-2(x-3)^2-5$ 3) $y=-2x^2+x+\frac{7}{8}$

4. 다음 함수의 그라프는 y축에 관하여 대칭이동하여도 달라지지 않는다. 왜 그런가?

   1) $y=|x|$ 2) $y=ax^2$

알아보기

1. 함수 $y=x^{\frac{1}{2}}$의 그라프를 x축에 관하여 대칭이동한 다음 련이어 y축에 관하여 대칭이동하면 어떤 함수의 그라프가 얻어지겠는가?
2. 함수 $y=x^{\frac{1}{2}}$의 그라프로부터 함수 $y=-(-x)^{\frac{1}{2}}$의 그라프를 단번에 얻자면 무엇에 관한 대칭이동을 진행하면 되겠는가?
3. 함수 $y=f(x)$의 그라프로부터 함수 $y=-f(-x)$의 그라프를 얻자면 어떻게 하면 되겠는가를 생각해보아라.

일반적으로 함수 $y=f(x)$의 그라프를 원점에 관하여 대칭이동하면 $y=-f(-x)$의 그라프를 얻는다.

문 제

1. $y=x^2-4x+5$와 $y=-x^2-4x-5$의 그라프는 원점에 관하여 대칭이다. 왜 그런가?
2. 다음 함수의 그라프를 원점에 관하여 대칭이동하면 어떤 함수의 그라프를 얻게 되는가?

   1) $y=3-5x$ 2) $y=-3x^2+x-2$

3. 다음 함수의 그라프는 원점에 관하여 대칭이동하여도 달라지지 않는다. 왜 그런가?

1) $y=x$ 2) $y=ax^3\ (a\neq 0)$ 3) $y=\frac{1}{x}$

3) 확대와 축소

해보기 함수 $y=x^2$과 $y=3x^2$의 그라프에서

1) x자리표가 같은 점들의 y자리표사이에는 어떤 관계가 있겠는가?

2) $y=x^2$의 그라프로부터 $y=3x^2$의 그라프를 어떻게 얻을수 있겠는가?

3) $a>0$일 때 함수 $y=x^2$의 그라프에서 x자리표는 그대로 두고 y자리표만 a배 하면 어떤 함수의 그라프가 나오겠는가?

> **$y=af(x)$의 그라프**
>
> $a>0$일 때 $y=f(x)$의 그라프를 y축방향으로 a배 확대(또는 축소)하면 $y=af(x)$의 그라프를 얻는다.

문 제

1. 다음 함수의 그라프에서 y축 방향으로 2배, 0.5배 하면 어떤 함수의 그라프가 얻어지겠는가?

1) $y=x+1$ 2) $y=x^2-3$ 3) $y=\frac{1}{x}$ 4) $y=\sqrt{x}$

2. 함수 $y=x^2$의 그라프로부터 다음 함수의 그라프를 어떻게 얻을수 있겠는가?

1) $y=\frac{3}{4}x^2$ 2) $y=5(x-1)^2$ 3) $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-5$

4) $y=3x^2-12x+7$ 5) $y=ax^2+bx+c$ 6) $y=-2(x+1)^2$

련 습 문 제

1. 다음 물음에 대답하여라.

1) 바른4각형의 둘레를 x, 그 면적을 y라고 할 때 y는 x의 함수인가?

2) 30km/h의 속도로 t시간동안에 달린 거리를 Skm로 표시하면 S는 t의 함수인가?

2. 어떤 함수 f가 그림 2-12와 같은 그라프로 주어졌다. 이것을 보고 다음것을 구하여라.

1) f의 뜻구역과 값구역

2) $f(-4)$, $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$

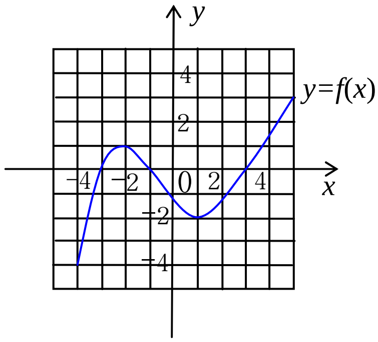


그림 2-12

3. 함수 f가 다음의 수표로 주어졌다.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-7	-4	-1	2	5	8

1) f의 뜻구역과 값구역을 말하여라.

2) f의 그라프를 그려라.

4. 다음 함수의 뜻구역을 구하여라.

1) $y=\dfrac{7x^2-5x+1}{7}$ 2) $y=\dfrac{3-x}{x^2-1}$

3) $y=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$ 4) $y=\sqrt{3x-1}$

5. 3개의 원소로 이루어진 모임 X={x, y, z}가 있다.

1) X를 X에로 넘기는 넘기기는 모두 몇개인가?

2) 그가운데서 1:1 넘기기는 모두 몇개인가? 그것을 써보아라.

6. 자리표평면의 점 $(x,\ y)$를 점 $(x+1,\ y-2)$에로 넘기는 넘기기를 $f:(x,\ y)\to(x+1,\ y-2)$로 표시하면 그의 거꿀넘기기 f^{-1}은 (   )이다.

1) f^{-1}: $(x+1,\ y-2)\to(x,\ y)$

2) $f^{-1}:(x,\ y)\to(x-1,\ y+2)$

3) $f^{-1}:(x,\ y)\to(x+1,\ y-2)$

7. $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x>0) \\ e & (x=0) \\ 0 & (x<0)\end{cases}$ 일 때 $f\{f[f(-2)]\}=$______ 이다.

8. 어떤 1차함수의 독립변수 x가 $[-6,\ 2]$에서 변할 때 함수값 y는 $[2,\ 6]$에서 변한다. 이 함수를 구하여라.

9. $y=|x|$와 같은 함수는 ( )이다.

1) $y=\sqrt{x^2}$ 2) $y=\dfrac{x^2}{x}$ 3) $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$ 4) $y=\dfrac{x^3}{x^2}$

10. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$일 때 다음 같기식이 성립한다는것을 증명하여라.

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$$

11. $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^3+\dfrac{1}{x^3}$일 때 $f(x)$를 구하여라.

12. $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\in(-\infty,\ 1)) \\ 2 & (x\in[1,\ +\infty)) \end{cases}$의 그라프를 그려라.

13. $g(x)=1-2x$, $f(g(x))=\dfrac{1-x^2}{x^2}$이라면 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값은 얼마인가?

14. $y=\dfrac{x}{3}+m$과 $y=nx-6$이 서로 거꿀함수라면 m, n의 값은 얼마인가?

15. $y=-f(x)$와 $y=-f^{-1}(x)$의 그라프는 서로 ( )이다.

1) 원점에 관하여 대칭 2) x축에 관하여 대칭

3) 직선 $y=x$에 관하여 대칭 4) $y=-x$에 관하여 대칭

16. $y=-\sqrt{x}$의 거꿀함수는 $y=x^2$이다. 이 함수의 뜻구역은 ( )이다.

1) $x\in\mathrm{R}$ 2) $\{x \mid x\in\mathrm{R},\ x\neq 0\}$ 3) $\{x \mid x>0\}$ 4) $\{x \mid x\leq 0\}$

17. 다음 함수의 거꿀함수를 구하여라.

1) $y=|x-1|$ $(x\in(-\infty,\ 1])$ 2) $y=\dfrac{3x+4}{5-2x}$ $(x\neq 2.5)$

18. 함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{4x-3}$, $g(x)=\dfrac{3x+1}{4x-1}$에 대하여 다음것을 밝혀라.

1) $g(x)$는 $f(x)$의 거꿀함수이다.

2) $f[g(x)]=x$ 3) $g[f(x)]=x$

19. 다음 함수들가운데서 짝함수와 홀함수를 갈라내여라.

1) $y=3x^4+\dfrac{3}{4}x^3-3$ 2) $y=-\dfrac{-1}{5x^3+2x}$

3) $y = x|x|$　　　　4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{7} - x^2}} + \sqrt{x^2 - 5}$

20. 두 짝함수의 적은 짝함수인가?

21. 두 홀함수의 적은 홀함수인가?

22. 다음 함수들이 짝홀성을 가지지 않는다는것을 뜻구역으로 설명하면 다음과 같다.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3}}$ 이 짝홀성을 가지지 않는것은 뜻구역이 $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},\ 2) \cup (2,\ +\infty)$ 로서 ______이 아니기때문이다.

2) $f(x) = x^2 + 5 - \dfrac{1}{x^2 - 2} + \sqrt{x+5}$ 이 짝홀성을 가지지 않는것은 뜻구역이 ______ 로서 ______이기때문이다.

23. 다음 함수의 그라프를 x축의 정방향으로 3만큼 평행이동하고 이어서 y축의 정방향으로 2만큼 평행이동하면 어떤 함수의 그라프를 얻게 되는가?

1) $y=3-5x$　　2) $y = 2x^2 - 1$　　3) $y = \sqrt{x}$　　4) $y = 2x^2 + 8x + 5$

24. 다음 2차함수의 그라프는 $y = x^2$ 의그라프를 어떻게 평행이동하면 얻을수 있는가?

1) $y = x^2 - 3$　　　　2) $y = (x-7)^2$

3) $y = (x+4)^2 - 3$　　　　4) $y = x^2 + 6x + 11$

25. 2차함수 $y = 2x^2 + 10x + 13$ 의 그라프를 어떻게 평행이동해야 $y = 2x^2 - 6x + 1$ 의 그라프와 일치하겠는가?

26. $1999 \le x \le 2000$일 때 함수 $y = x^2 + x + \dfrac{1}{2}$ 의 함수값가운데서 옹근수값의 개수는 (　)이다.

1) 4 001　　2) 4 000　　3) 3 999　　4) 3 998

탐 구

함수 $y=f(x)$의 그라프를 x축방향으로 a배 확대(또는 축소)하면 $y = f\left(\dfrac{x}{a}\right)$의 그라프가 얻어진다는것을 밝혀보아라.

제2절. 분수함수와 무리함수

1. 분수함수와 그의 그라프

찾 기 1. 다음 식에서 분수식을 가려내여라.

1) $3x^2-7+x$ 2) $\frac{\sqrt{2x}}{1+x}$ 3) $x+\frac{2x-1}{x}$

4) $\frac{a^2b}{3a-b}$ 5) $\frac{x^2-6x+9}{(x-3)(x-2)}$

2. 분수식 $\frac{1}{x+1}$ 의 뜻구역의 x=1, 2, 3에 $\frac{1}{x+1}$ 의 값을 대응시켜라.

이때 뜻구역의 어떤 x에 대하여서도 서로 다른 $\frac{1}{x+1}$ 의 값이 정해지겠는가?

> 분수식의 뜻구역의 매개 값에 그 분수식의 값을 대응시키는 함수를 분수함수라고 부른다.

례 1 다음 분수함수의 뜻구역을 구하여라.

1) $y=\frac{2}{x-1}$ 2) $y=\frac{x}{x+3}+2$

(풀이) 1) $x-1\neq0$ 즉 $x\neq1$

따라서 분수함수 $y=\frac{2}{x-1}$ 의 뜻구역은 $(-\infty,\ 1)\cup(1,+\infty)$

2) $x+3\neq0$ 즉 $x\neq-3$

따라서 분수함수 $y=\frac{x}{x+3}+2$ 의 뜻구역은 $(-\infty,\ -3)\cup(-3,+\infty)$

문 제

다음 함수들의 뜻구역을 구하여라.

1) $y=1+\frac{1}{x}$ 2) $y=\frac{x+1}{x-3}$ 3) $y=\frac{2x-1}{4-3x}$ 4) $y=\frac{3x-10}{x^2-6x+8}$

알아보기 1. $y=\frac{1}{x}=f(x)$ 일 때 $y=\frac{2}{x-3}+5$ 를 $y=f(x)$ 에 관하여 표시하면 $y=2f(x-3)+5$ 라고 말할수 있는가?

2. 아래와 같이 함수의 그라프를 순차적으로 얻자면 어떻게 해야 하겠는가?

$$y=\frac{1}{x}\Rightarrow y=\frac{2}{x}\Rightarrow y=\frac{2}{x-3}\Rightarrow y=\frac{2}{x-3}+5$$

$$(y=f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow y=2f(x)\Rightarrow y=2f(x-3)\Rightarrow y=2f(x-3)+5)$$

$y=\dfrac{a}{x-m}+n$ (a, m, n은 상수, $a\neq 0$) 모양으로 표시되는 함수의 그라프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그라프를 변환하여 얻을수 있다.

례 2 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$의 그라프를 그려보자.

분수식을 변형하면

$$y=\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x+1}=\frac{2\left(x+1-\frac{3}{2}\right)}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}$$

즉 $y=-\dfrac{3}{x+1}+2$

$$y=\frac{1}{x}\text{ 을 }\ \frac{1}{x}\to\frac{3}{x}\to-\frac{3}{x}\to-\frac{3}{x+1}\to-\frac{3}{x+1}+2$$

와 같이 바꾸면서 이에 따르는 그라프변환을 차례로 진행하면 된다.

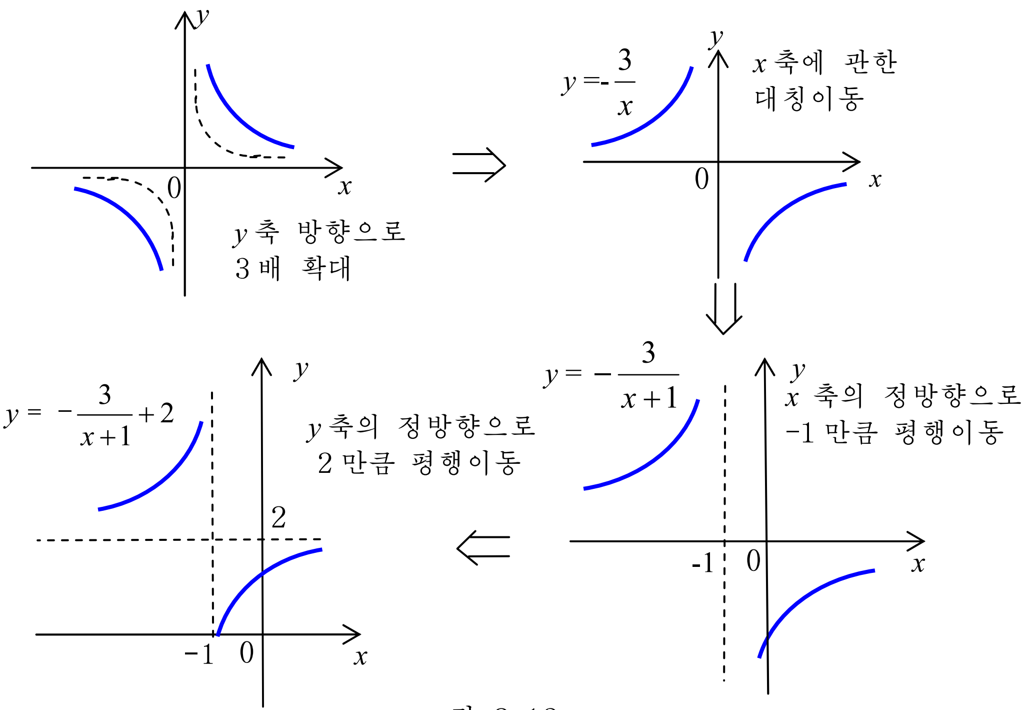


그림 2-13

문 제

1. 다음 함수의 그라프는 $y=\frac{1}{x}$의 그라프로부터 어떻게 얻을수 있는가?

   1) $y=-\frac{3}{x}$ 2) $y=\frac{2}{x-1}-3$ 3) $y=-\frac{2}{3-x}+1$

2. 그림 2-14는 $y=\frac{1}{x}$의 그라프를 변환한것을 보여준다.
   변환된 곡선은 어떤 함수의 그라프인가?

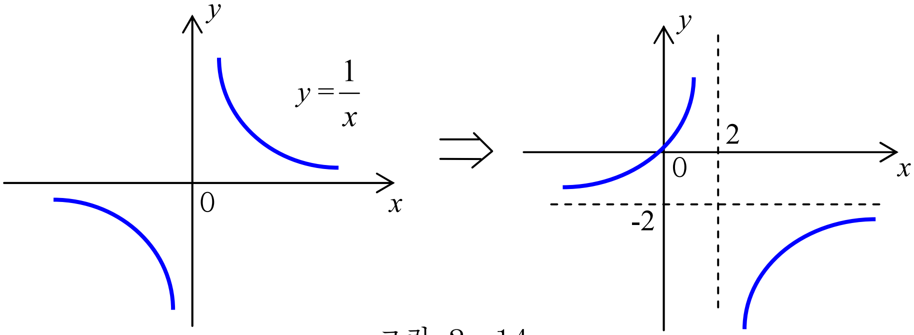


그림 2 -14

3. 함수 $y=\frac{1}{|x|+1}$의 그라프를 그려라.

찾기 다음 분수식들을 $\frac{a}{x-m}+n$의 모양으로 변형하여라.

$$\frac{x}{1+x},\quad \frac{4x-1}{1-x},\quad \frac{2x+16}{3x+3}$$

> $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (a, b, c, d는 상수, $c\neq0$, $bc-ad\neq0$)형태로 된 분수함수의 그라프는 다 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그라프로부터 얻을수 있다.

문 제

1. 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그라프를 변환하는 방법으로 다음 함수의 그라프를 그려라.

   1) $y=\frac{x+1}{x-2}$ 2) $y=\frac{3x-4}{x+2}$ 3) $y=\frac{4x}{2x-4}$ 4) $y=\frac{12-4x}{2x-3}$

2. 다음 함수의 그라프를 그려라.

   1) $y=\frac{1}{|x|}$ 2) $|y|=\frac{1}{x}$ 3) $y=\left|\frac{x+1}{x-2}\right|$ 4) $y=\frac{3}{1+|x|}$

3. 함수 $y=\dfrac{ax}{x+b}$의 그라프는 직선 $y=2$, $x=1$을 새로운 x축, y축으로 잡을 때 $y=\dfrac{2}{x}$의 그라프와 같아진다. a, b의 값을 각각 구하여라.

2. 무리함수와 그의 그라프

찾기 1. 다음 식들가운데서 무리식을 가려내여라.

$$\sqrt{x},\ (x-3)^2,\ a+\sqrt{\frac{b-1}{b+1}},\ \frac{x-1}{\sqrt{3}(x+1)},\ (2x-3)^{\frac{1}{2}}$$

2. 무리식 $\sqrt{x-2}$의 뜻구역의 $x=3$, 4, 5에 $\sqrt{x-2}$의 값을 대응시켜라.

> 무리식의 뜻구역의 매개 값에 그 무리식의 값을 대응시키는 함수를 무리함수라고 부른다.

례 1 다음 무리함수의 뜻구역을 구하여라.

1) $y=\sqrt{x+7}$ 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}+x$

(풀이) 1) $x+7\geq 0$ 즉 $x\geq -7$

따라서 무리함수 $y=\sqrt{x+7}$의 뜻구역은 $[-7, +\infty)$

2) 분모가 0이 되지 말아야 하므로 $x+3>0$ 즉 $x>-3$

따라서 무리함수 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}+x$의 뜻구역은 $(-3, +\infty)$

문 제

1. 다음 함수의 뜻구역을 구하여라.

1) $y=\sqrt{2x+1}$ 2) $y=(4-5x)^{\frac{1}{2}}$

3) $y=\sqrt{x^2-2x+15}$ 4) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}}$

2. $y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}$의 뜻구역은 ( )이다.

1) $x\geq \dfrac{1}{2}$ 2) $x\leq \dfrac{1}{2}$ 3) $x=\dfrac{1}{2}$ 4) $x\leq \dfrac{1}{2}$ 혹은 $x\geq \dfrac{1}{2}$

해보기 1. $y=f(x)=\sqrt{x}$ 일 때 $y=2\sqrt{x+1}+5$를 $y=f(x)$에 관하여 표시하여라.

2. 다음 함수의 그라프를 얻자면 어떻게 변환하여야겠는가?

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y = 2\sqrt{x} \Rightarrow y = 2\sqrt{x+1} \Rightarrow y = 2\sqrt{x+1}+5$$

> $y=a\sqrt{x-m}+n\,(a \neq 0)$ 모양의 무리함수의 그라프는 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 변환하여 얻을수 있다.

례 2 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 어떻게 변환하면 $y=-\sqrt{2-4x}+3$ 의 그라프를 얻겠는가?

(풀이) $y=-\sqrt{2-4x}+3=-\sqrt{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)}+3=-2\sqrt{-(x-\frac{1}{2})}+3$

$y=\sqrt{x}$ 을

$$\sqrt{x} \to 2\sqrt{x} \to -2\sqrt{x} \to -2\sqrt{-x} \to -2\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)} \to -2\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)}+3$$

과 같이 바꾸면서 이에 따르는 그라프변환을 차례로 진행하면 된다.

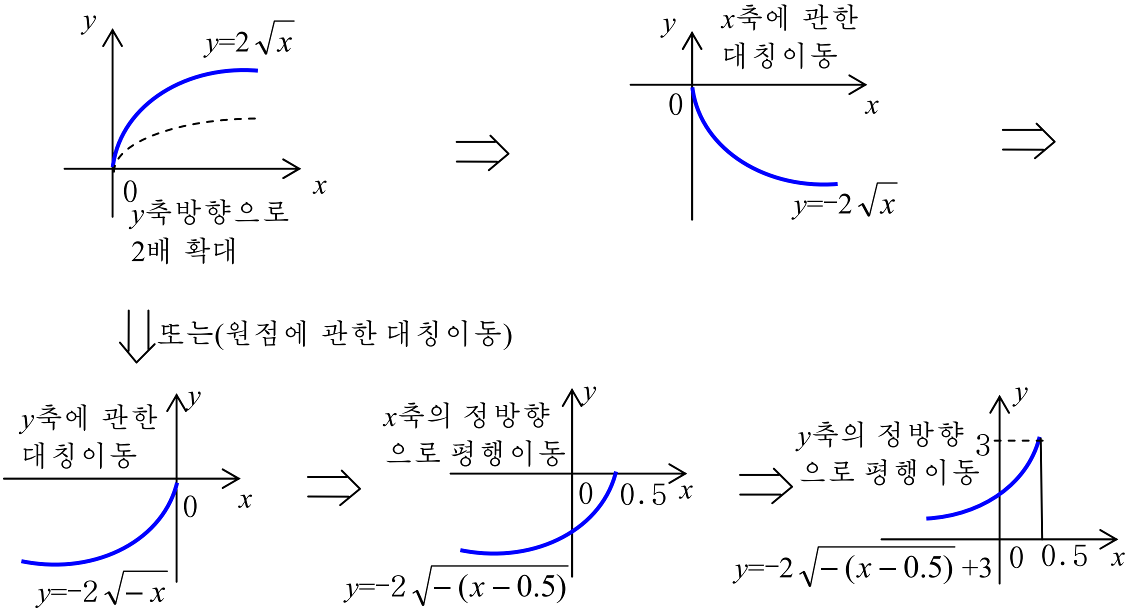


그림 2-15

문 제

1. $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 어떻게 변환하면 다음 함수의 그라프를 얻겠는가?

   1) $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$ 2) $y=-\sqrt{-x}$ 3) $y=\sqrt{1-x}-1.5$ 4) $y=-\sqrt{0.5-x}+2$

2. 다음 함수의 그라프를 그리는 방법을 말하고 대강 그려보아라.

   1) $y=\sqrt{2x-3}$ 2) $y=-(4x-3)^{\frac{1}{2}}$ 3) $y=-2\sqrt{3-x}+1$

3. 다음 그림과 같이 변환한 곡선은 어떤 함수의 그라프인가?

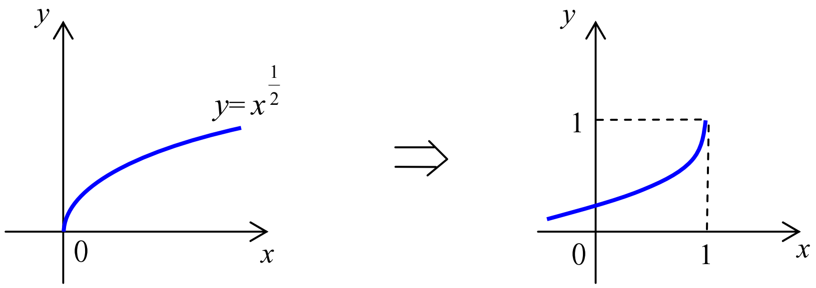


그림 2-16

련 습 문 제

1. $y=\dfrac{1}{2-x}$ 의 뜻구역은 ( )이다.

   1) (2, 3)   2) [2, 3)   3) (2, 3]   4) $(-\infty, 2)\cup(2, +\infty)$

2. 함수 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그라프를 변환하여 다음 함수의 그라프를 그리는 방법을 말하고 대강 그려라.

   1) $y=3-\dfrac{1}{x-2}$ 2) $y=\dfrac{x-1}{2-x}$ 3) $y=\dfrac{5x+3}{3x+1}$ 4) $y=\dfrac{3}{x}+3x-1$

3. 함수 $y=\dfrac{3}{x-2}+4$ 의 그라프를 y축에 평행되게 얼마만큼 이동해야 A(5, 1)이 이 곡선의 점으로 되겠는가?

4. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($x\neq-\dfrac{d}{c}$, $bc-ad\neq0$)의 그라프를 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그라프로부터 얻을수 있다는것을 밝혀라.

5. 무리함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 변환하여 다음 함수의 그라프를 그리는 방법을 말하고 대강 그려라.

1) $y=-\sqrt{x+2}$ 2) $y=1-\sqrt{x-2}$ 3) $y=3+\sqrt{x+1}$ 4) $y=\sqrt{6-9x}-4$

6. 함수 $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$의 그라프는 직선 $y=2x$와 사귀지 않는다는것을 밝혀라.

7. 그림 2-17을 보고 안같기식 $\dfrac{5-x}{x-1}<x+1$의 풀이모임을 구하여라.

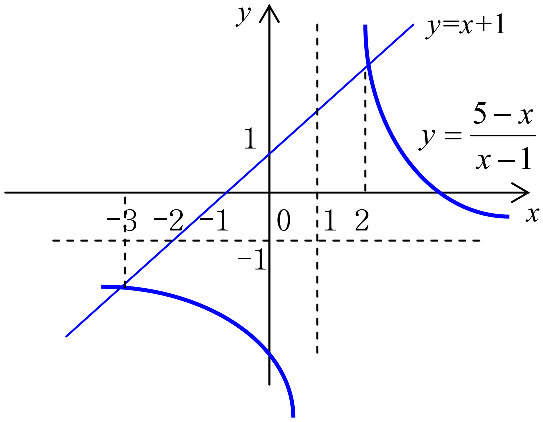


그림 2-17

8. 그림 2-18을 보고 안같기식 $\sqrt{3-x}\le x-1$의 풀이모임을 구하여라.

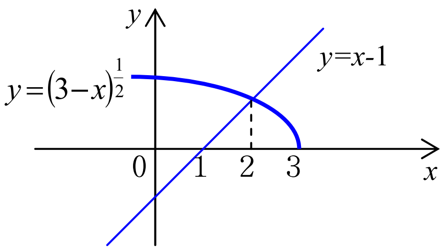


그림 2-18

9. 함수 $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$의 그라프를 그려라.

10. 함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그라프를 그려라.

탐 구

함수 $y=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$의 그라프를 대강 그려라.

제3절. 제곱과 제곱함수

1. 지수가 옹근수인 제곱

알아보기 $a \neq 0$, m, $n \in \mathrm{N}$일 때

1) 지수법칙 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$은 m과 n사이에 어떤 관계가 있을 때 써 왔는가?

2) 지수법칙을 $m=n$일 때도 그대로 쓰기로 한다면

$$\frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0$$

이다. 2^0 의 값은 얼마와 같다고 볼수 있는가?

3) $m=n$일 때 지수법칙이 그대로 성립하게 하자면 a^0 의 값을 얼마로 정해주면 되겠는가?

$$a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$$

례 1 $$\frac{a^3}{\left(\frac{3}{4}\right)^0} \cdot \frac{b^0}{a^3} = \frac{a^3}{1} \cdot \frac{1}{a^3} = 1$$

해보기 1) $a \neq 0$, m, $n \in \mathrm{N}$ 일 때 지수법칙 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$을 $m<n$일 때에도 그대로 쓰기로 한다면

$$\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2}$$

이다. 2^{-2}의 값은 얼마와 같다고 볼수 있는가?

2) a^{-2}을 어떤 분수모양으로 정해주면 좋겠는가?

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0,\ n \in \mathrm{N})$$

례 2 $$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$2x(3a+b)^{-2} = \frac{2x}{(3a+b)^2}$$

문 제

1. 다음 값을 계산하여라.

1) 0.0023^0　2) $(-1.087)^0$　3) $(-\pi)^0$　4) $-(-7)^0+[(-3.7+\frac{3}{5})^2]^0$

2. 다음 식을 분수모양으로 표시하여라.

1) 5^{-2}　2) $(-9)^{-1}$　3) $(3xy)^{-3}$　4) $(x+y)^{-2}$

3. 다음 식을 제곱으로 표시하여라.

1) $\frac{1}{8}$　2) 0.000 001　3) $\frac{1}{125}$　4) $\frac{1}{16a^4}$　5) $\frac{1}{27(m+n)^3}$

4. 다음 수들의 크기를 비교하여라.

1) 3^{-4}과 2^{-4}　2) 0.01^{-3}과 0.001^{-3}　3) $\left(\frac{6}{5}\right)^{-3}$ 과 $\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}$

5. a, $b\neq0$, $m\in\mathrm{N}$ 일 때 다음 같기식이 성립한다는것을 밝혀보아라.

1) $a^m a^0=a^{m+0}$　2) $\left(a^m\right)^0=a^{m\cdot0}$　3) $(ab)^0=a^0b^0$　4) $\left(\frac{a}{b}\right)^0=\frac{a^0}{b^0}$

6. 다음 같기식이 성립한다는것을 따져보아라.(a, $b\neq0$, m, $n\in\mathrm{N}$)

1) $a^{-m}\cdot a^{-n}=a^{-m+(-n)}$

$$a^{-m}a^{-n}=\frac{1}{a^m}\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^m a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-(m+n)}=a^{-m+(-n)}$$

2) $a^m\div a^{-n}=a^{m-(-n)}$　3) $\left(a^{-m}\right)^n=a^{-mn}$

4) $(ab)^{-n}=a^{-n}b^{-n}$　5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{a^{-n}}{b^{-n}}$

2. n차뿌리

1) $\frac{1}{n}$ 제곱

해보기 바른6면체의 한 모서리의 길이가 a일 때 그 체적은 a^3이다.

1) 바른6면체의 체적이 8이라고 하면 모서리의 길이는 얼마이겠는가?

2) $a^3=8$에 맞는 a의 값을 8^m 로 표시하면 m을 어떤 수로 표시하면 좋겠는가?

3) 바른6면체의 체적이 V일 때 모서리의 길이를 제곱모양으로 표시하여보아라.

$a \geq 0$이고 $n \geq 2\,(n \in \mathrm{N})$일 때 n제곱이 a인 부 아닌 수를 $a^{\frac{1}{n}}$로 표시하고 a의 $\frac{1}{n}$제곱이라고 부른다.

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a$$

례 1 $27=3^3$이므로 $27^{\frac{1}{3}}=3$, $100000=10^5$이므로 $100000^{\frac{1}{5}}=10$

$16=2^4$이므로 $16^{\frac{1}{4}}=2$

$a^{\frac{1}{n}}$을 $\sqrt[n]{a}$와 같이 쓰고 《n루트 a》라고 읽는다.

(여기서 n=2일 때는 보통 n을 쓰지 않는다.)

례 2 $64^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$　　　$\left(\frac{9}{7}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{9}{7}}$

문 제

1. 다음의 같기식을 $\frac{1}{n}$제곱이 든 식으로 고쳐보아라.

1) $1^3=1$, $2^3=8$, $5^3=125$　　　2) $5^2=25$, $3^4=81$, $0.1^5=0.00001$

2. 다음의 같기식을 n제곱이 든 식으로 고쳐보아라.

1) $4^{\frac{1}{2}}=2$, $729^{\frac{1}{6}}=3$, $8000000^{\frac{1}{3}}=200$

2) $0.36^{\frac{1}{2}}=0.6$, $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$, $0.000064^{\frac{1}{6}}=0.2$

2) n차뿌리

해보기 1. 다음 방정식의 풀이를 말해보아라.

1) $x^2=\frac{9}{25}$　　　2) $x^3=-27$

2. 2차뿌리를 정의하여라.

방정식 $x^n=a(n \in \mathrm{N})$의 풀이를 a의 **n차뿌리**라고 부른다.

례 3 $x^3=8$ 의 풀이 즉 8의 3차뿌리는 $8^{\frac{1}{3}}=2$

$x^4=16$ 의 풀이 즉 16의 4차뿌리는 2, -2

문 제

1. 다음 말이 옳은가?
   1) 2와 -2는 64의 6차뿌리이다.
   2) -5는 -125의 3차뿌리이다.
   3) 0.4와 -0.4는 0.0256의 4차뿌리이다.
   4) 0은 0의 $n(n\in\mathrm{N})$차뿌리이다.
2. 다음 값을 구하여라.
   1) 64의 3차뿌리　　2) -27의 3차뿌리
   3) 0.000 1의 4차뿌리　　4) 81의 4차뿌리

해보기 1) 다음것들의 n차뿌리는 몇개인가?

(1) 9의 2차뿌리　(2) 16의 4차뿌리　(3) 64의 6차뿌리

2) $a>0$일 때 a의 짝수차뿌리의 개수는 몇개인가?

3) 0의 짝수차뿌리는 얼마인가?

4) $a<0$일 때 a의 짝수차뿌리는 얼마인가?

> **n이 짝수일 때**
>
> $a>0$이면 a의 n차뿌리는 두개 즉 $\pm a^{\frac{1}{n}}\left(\pm\sqrt[n]{a}\right)$
>
> $a=0$이면 a의 n차뿌리는 0뿐이다.
>
> $a<0$이면 a의 n차뿌리는 없다.

례 4 1) $x^4=256$ 의 풀이 즉 256의 4차뿌리는

$x=\pm256^{\frac{1}{4}}=\pm4$ 또는 $x=\pm\sqrt[4]{256}=\pm\sqrt[4]{4^4}=\pm4$

2) $x^8=11$ 의 8차뿌리는

$x=\pm11^{\frac{1}{8}}$ 또는 $x=\pm\sqrt[8]{11}$

11 [2ndF] [$\sqrt[x]{y}$] 8 [=] 1.3495

따라서 $x\approx\pm1.3495$

해보기 1. 다음것들의 n차뿌리는 얼마이며 몇개인가?

1) 8의 3차뿌리　　2) 32의 5차뿌리

3) -32의 5차뿌리　　4) 0의 홀수차뿌리

2. $a\in R$일 때 a의 홀수차뿌리의 개수는 얼마인가?

n이 홀수일 때

$a>0$이면 a의 n차뿌리는 $a^{\frac{1}{n}}\left(\sqrt[n]{a}\right)$이다.

$a=0$이면 a의 n차뿌리는 0뿐이다.

$a<0$이면 a의 n차뿌리는 $-|a|^{\frac{1}{n}}$이다.

앞에서 뿌리기호 $\sqrt[n]{\ }$ 은 $\frac{1}{n}$제곱을 표시하는데 썼다.

n이 홀수일 때 뿌리기호는 부수의 n차뿌리를 표시하는데도 쓴다.

례 5 -5의 3차뿌리를 $\sqrt[3]{-5}$와 같이 쓴다.

즉 $\sqrt[3]{-5}=-|-5|^{\frac{1}{3}}=-5^{\frac{1}{3}}$

문 제

1. 다음과 같이 말하면 옳은가?

1) $\sqrt[6]{64}$는 정수이다.　　2) $\sqrt[3]{-125}$는 정수이다.

3) -2의 3차뿌리는 없다.　　4) 64의 3차뿌리는 2개 즉 4와 -4이다.

5) 9의 4차뿌리는 정수이다.　　6) $\sqrt[11]{-121}$은 부수이다.

2. 다음 방정식의 풀이를 제곱과 뿌리기호를 써서 각각 표시하여라.

1) $x^6=1.3$, $x^{10}=\frac{3}{4}$, $x^4=0$　　2) $x^3=\frac{2}{3}$, $x^5=0$, $x^7=-0.6$

3. 다음 뿌리가 있으면 제곱으로 표시하여라.

1) $\frac{1}{2}$의 4차뿌리, 0의 6차뿌리, -0.12의 8차뿌리

2) 13의 5차뿌리, 0의 7차뿌리, $-1\frac{2}{7}$의 9차뿌리

4. 다음것을 제곱으로 표시하여라.

1) $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{\frac{3}{17}}$, $\sqrt[4]{1\frac{5}{9}}$　　2) $\sqrt[3]{-6}$, $\sqrt[5]{-1.9}$, $\sqrt[9]{0.6}$

5. 다음 방정식을 풀어라.

1) $x^2-1.3=0$　　2) $3x^2-11=0$　　3) $3x^{14}-18=0$

4) $(x-5)^5=-2$　　5) $(x+1)^7=3$

6. 다음 갈기식이 a의 어떤 값들에 대해서 성립하는가?

1) $\sqrt[3]{a^3}=a$　　2) $\sqrt[4]{a^4}=a$　　3) $\sqrt[4]{a^4}=-a$　　4) $\sqrt[4]{a^4}=|a|$

3) $\frac{1}{n}$제곱의 성질

해보기 1. A≥0일 때 $A^{\frac{1}{n}}$=B가 옳다는것을 증명하자면 어떤 사실들을 밝혀야 하는가?

2. 다음 값들을 비교하여라.

1) $(8\cdot 27)^{\frac{1}{3}}$과 $8^{\frac{1}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}$　　2) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$과 $\frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}}$

3) $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3$과 $\left(4^3\right)^{\frac{1}{2}}$　　4) $\left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$과 $64^{\frac{1}{2\cdot 3}}$

$\frac{1}{n}$제곱의 성질

1) $(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}\ (a\ge 0,\ b\ge 0,\ n\in \mathrm{N})$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}\ (a\ge 0,\ b>0,\ n\in \mathrm{N})$

3) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}\ (a\ge 0,\ n\in \mathrm{N},\ m\in \mathrm{N})$

4) $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{mk}\right)^{\frac{1}{nk}}\ (a\ge 0,\ m,\ n\in \mathrm{N},\ k\in \mathrm{N})$

5) $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}\ (a\ge 0,\ m\in \mathrm{N},\ n\in \mathrm{N})$

성질 1), 3)을 증명하자.

1)의 증명

$$\left(a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}\right)^n=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n=ab$$

한편 $a\geq 0$, $b\geq 0$이므로 $a^{\frac{1}{n}}\geq 0,\ b^{\frac{1}{n}}\geq 0$

따라서 $a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}\geq 0$ 이리하여

$$(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}$$

3개이상의 부 아닌수 a, $b,\cdots$, ℓ에 대하여서도 다음 식이 성립한다.

$$(ab\cdots\ell)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}\cdots\ell^{\frac{1}{n}} \quad \text{특히} \quad (a^n)^{\frac{1}{n}}=a$$

3)의 증명

$a\geq 0$이므로 성질 1)에 의하여

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=\underbrace{a^{\frac{1}{n}}\cdot a^{\frac{1}{n}}\cdot a^{\frac{1}{n}}\cdots a^{\frac{1}{n}}}_{m\text{개}}=(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m\text{개}})^{\frac{1}{n}}=(a^m)^{\frac{1}{n}}$$

례 6 $(81\cdot 256)^{\frac{1}{4}}=81^{\frac{1}{4}}\cdot 256^{\frac{1}{4}}=3\cdot 4=12$

$$\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{27^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{4}$$

례 7 $(27^4)^{\frac{1}{3}}=\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^4=3^4=81$

$$(3^6)^{\frac{1}{12}}=(3^6)^{\frac{1}{6\cdot 2}}=3^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(32^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}=32^{\frac{1}{15}}$$

32 [y^x] 1 [$a\,b/c$] 15 [=] 1.2599

따라서 $(32^4)^{\frac{1}{3}}\approx 1.2599$

문 제

1. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $(0.4^6)^{\frac{1}{12}}$　　2) $(7^4)^{\frac{1}{16}}$　　3) $(a^4)^{\frac{1}{8}}$

2. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $(16 \cdot 81)^{\frac{1}{4}}$ 2) $\left(\frac{1}{81} \cdot 10000\right)^{\frac{1}{4}}$ 3) $(8 \cdot 125 \cdot 64)^{\frac{1}{3}}$

4) $\dfrac{54^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$ 5) $\left(10 - 19^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(10 + 19^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$

3. $\frac{1}{n}$제곱의 성질을 뿌리기호를 써서 표시하여라.

4. 다음 같기식이 옳은가?

1) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^3 = \sqrt[4]{27}$ 2) $\left(\sqrt[3]{-2}\right)^4 = \sqrt[3]{16}$

3) $\left(\sqrt[5]{-2}\right)^7 = \sqrt[5]{-128}$ 4) $\left(\sqrt[6]{3}\right)^7 = \sqrt[6]{2187}$

5. 밑수의 인수가운데서 $\frac{1}{n}$제곱 또는 뿌리기호밖으로 내보낼수 있는것은 다 내보내여라.

1) $\left(81 \cdot a^4\right)^{\frac{1}{4}}$ 2) $\sqrt[5]{-3a^7 b^{10}}$ 3) $\sqrt[6]{64a^7 x^{12} y^8}$ 4) $\left(\dfrac{x^6 y}{a^3 b^6}\right)^{\frac{1}{3}}$

6. 다음 식에서 인수를 $\frac{1}{n}$제곱 또는 뿌리기호안에 넣어라.

1) $5 \cdot 7^{\frac{1}{2}}$ 2) $2\sqrt[4]{3}$ 3) $xy\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$ 4) $(a-b)\sqrt[3]{\dfrac{2}{a^2 - b^2}}$

7. 다음 두 식의 값을 비교하여라.

1) $\sqrt[3]{3}$ 과 $\sqrt{2}$ 2) $\sqrt[6]{5}$ 과 $\sqrt[3]{3}$ 3) $2^{\frac{1}{3}}$ 과 $45^{\frac{1}{12}}$ 4) $7^{\frac{1}{3}}$ 과 $\left(3\left(2^{\frac{1}{3}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

3. 지수가 분수인 제곱

해보기 1. 다음 식들의 값을 비교하여라.

$$\left(2^4\right)^{\frac{1}{2}} \text{ 과 } 2^{\frac{4}{2}} = 2^2, \quad \left(81^{-2}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ 과 } 81^{-\frac{2}{4}} = 81^{-\frac{1}{2}}, \quad \left(81^2\right)^{\frac{1}{4}} \text{ 과 } 81^{\frac{2}{4}} = 81^{\frac{1}{2}}$$

2. $a>0$일 때 $\left(a^3\right)^{\frac{1}{4}}$ 을 $a^{\frac{3}{4}}$ 으로 쓰기로 해도 되겠는가?

$a>0$, $m\in z$, $n\in$N일 때 $(a^m)^{\frac{1}{n}}$을 $a^{\frac{m}{n}}$으로 표시하고 a의 $\frac{m}{n}$ 제곱이라고 부른다.

$$\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \left(\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}\right)$$

례 1 $\left(0.3^5\right)^{\frac{1}{4}} = 0.3^{\frac{5}{4}}$, $\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^5 = \left(5^5\right)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{5}{4}}$, $\left(7^{-5}\right)^{\frac{1}{6}} = 7^{-\frac{5}{6}}$

유리수지수가 부수일 때도 부의 옹근수지수인 경우와 같은 뜻을 가진다.

$a>0$, m, $n\in$N일 때

$$a^{-\frac{m}{n}} = \left(a^{-m}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

즉

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

유리수지수는 또한 약분할수 있다.

$a>0$일 때

$$a^{\frac{3}{12}} = \left(a^3\right)^{\frac{1}{12}} = \left(\left(a^3\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}} \quad \text{즉} \quad a^{\frac{3}{12}} = a^{\frac{1}{4}}$$

례 2 1) $5^{-1.6}$을 $\frac{1}{n}$제곱모양으로 변형하여라.

2) $\frac{1}{\left(5^{0.3}\right)^{\frac{1}{2}}}$을 분수제곱모양으로 변형하여라.

(풀이) 1) $5^{-1.6} = 5^{-\frac{16}{10}} = 5^{-\frac{8}{5}} = \left(5^{-8}\right)^{\frac{1}{5}}$

2) $\frac{1}{\left(5^{0.3}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{5^{\frac{0.3}{2}}} = \frac{1}{5^{\frac{3}{20}}} = 5^{-\frac{3}{20}}$

문 제

1. 다음 식에서 유리수제곱을 $\frac{1}{n}$제곱모양으로 변형하여라.

1) $6^{\frac{2}{3}}$　2) $8^{\frac{8}{5}}$　3) $0.9^{0.2}$　4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.4}$

2. 다음 식을 유리수제곱모양으로 변형하여라.

1) $(12.4^3)^{\frac{1}{2}}$　2) $\left(\frac{1}{17}\right)^{\frac{1}{5}}$　3) $\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$

4) $\frac{1}{(12^{-2})^{\frac{1}{4}}}$　5) $(8a^3)^{\frac{1}{4}}$　6) $\frac{1}{3b(a^2)^{\frac{1}{7}}}$

3. 다음 제곱의 값을 구하여라.

1) $1000^{\frac{1}{3}}$　2) $0.01^{-\frac{1}{2}}$　3) $1^{-0.72}$　4) $10^{\frac{0}{7}}$

5) $27^{\frac{1}{3}}$　6) $16^{-\frac{1}{4}}$　7) $81^{\frac{3}{4}}$　8) 0.01^{-25}

4. 다음 식의 뜻구역을 구하여라.

1) $\sqrt[5]{\left(3x-\frac{3}{4}\right)^3}$　2) $(a-5)^{-\frac{2}{3}}$　3) $\sqrt[7]{(x-0.75)^5}$　4) $\sqrt[12]{(4-x)^7}$

유리수지수의 경우에도 지수법칙이 그대로 성립한다.

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $(a>0,\ r,\ s\in Q)$

2) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $(a>0,\ r,\ s\in Q)$

3) $(a^r)^s = a^{rs}$ $(a>0,\ r,\ s\in Q)$

4) $(a\cdot b)^r = a^r b^r$ $(a>0,\ b>0,\ r\in Q)$

5) $\left(\frac{b}{a}\right)^r = \frac{b^r}{a^r}$ $(a>0,\ b>0,\ r\in Q)$

1)을 증명하자.

(증명) r, s를 분모가 같은 분수로 고친것이 $r=\frac{m}{n}$, $s=\frac{k}{n}(k,\ m\in Z,\ n\in N)$

이라고 하자.

$$a^r a^s = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}(a^k)^{\frac{1}{n}} = (a^m a^k)^{\frac{1}{n}} = (a^{m+k})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{r+s}$$

마찬가지방법으로 다른것들을 증명할수 있다.

례 3

$$3^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}}=3^{\frac{3+8}{12}}=3^{\frac{11}{12}}$$

$$0.2^{-\frac{1}{2}}\div 0.2^{\frac{1}{3}}=0.2^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=0.2^{\frac{-3-2}{6}}=0.2^{-\frac{5}{6}}$$

$$\left(16^{-0.75}\right)^{-\frac{8}{3}}=16^{-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)}=16^{2}=256$$

$$(81\cdot 16)^{-\frac{1}{4}}=81^{-\frac{1}{4}}\cdot 16^{-\frac{1}{4}}=(3^{4})^{-\frac{1}{4}}\cdot\left(2^{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=3^{-1}\cdot 2^{-1}=(3\cdot 2)^{-1}=6^{-1}=\frac{1}{6}$$

문 제

1. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\sqrt[3]{a^{4}}\sqrt[5]{a}$ 2) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$ 3) $\sqrt[4]{\left(b^{-3}\right)^{2}}$

2. 다음 식을 지수가 분수인 제곱으로 표시하여라.

1) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{3}}$ 2) $\sqrt{\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}}$ 3) $\sqrt{\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{3}{5}\sqrt[3]{5\frac{1}{3}}}}$

4) $\sqrt{b^{2}\sqrt[4]{b^{-3}}}$ (b>0) 5) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$ $(a>0)$

3. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$ 2) $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}}}$

3) $\left(x^{\frac{a+b}{c-a}}\right)^{\frac{1}{b-c}}\left(x^{\frac{c+a}{b-c}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\left(x^{\frac{b+c}{a-b}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$ 4) $\frac{\sqrt{a^{-\frac{5}{3}}b^{3}c^{-\frac{2}{3}}}}{\sqrt{a^{\frac{1}{2}}b^{4}c^{-1}}}\cdot a^{12}\cdot\sqrt{a}\sqrt{b}$

4. 한 지방산업공장에서는 기술혁신운동을 힘있게 벌려 생산량을 5년동안에 해마다 평균 37%씩 늘였다.

1) 3년만에는 생산량이 약 몇배로 늘어났겠는가?

이전 생산량을 1로 보면 생산량이

1년만에는 $1+\frac{37}{100}$

2년만에는 $(1+\frac{37}{100})^{2}$

3년만에는 $(1+\frac{37}{100})^{3}\approx 2.571$ 답. 약 2.6배

2) 4년 3개월만에는 생산량이 약 몇배로 늘어났겠는가?

5. 어느 한 닭공장에서 생산공정을 현대화하여 닭알생산을 해마다 평균 30%씩 늘였다. 3년 6개월만에는 이전에 비하여 닭알생산량이 몇배로 늘어났겠는가?

4. α 제곱함수

지수가 무리수인 제곱도 유리수와 같이 생각할수 있다.

례를 들어 $2^{\sqrt{2}}$ 이 어떤 실수 α 에 끝없이 가까와간다는것을 알수 있다.

$$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$$

$$2^1,\ 2^{1.4},\ 2^{1.41},\ 2^{1.4142},\ \cdots\alpha\cdots,\ 2^{1.4143},\ 2^{1.415},\ 2^{1.42},\ 2^{1.5},\ 2^2$$
$$\longrightarrow \qquad\qquad \longleftarrow$$

우의 근사값들로 이루어진 두 렬은 다같이 어떤 수에 끝없이 가까와간다.

이 수 α 를 $2^{\sqrt{2}}$ 로 표시하기로 한다.

지수가 무리수인 제곱에서도 지수법칙이 그대로 성립한다.

해보기 1. 매개 수 x 에 제곱 $x^{\frac{1}{2}}$ 을 꼭 하나씩 대응시킬수 있는가?

2. 매개 수 x 에 $x^{\frac{2}{3}}$ 을 꼭 하나씩 대응시킬수 있는가?

3. 매개 수 x 에 제곱 $x^{\alpha}(\alpha \in \mathrm{R})$ 를 꼭 하나씩 대응시킬수 있는가?

> x 에 그의 α 제곱($\alpha \in \mathrm{R}$)을 대응시키는 함수 $f: x \to x^{\alpha}$
>
> 또는 $y = x^{\alpha}$ 을 α 제곱함수라고 부른다.

제곱함수에서는 지수가 어떤 수인가에 따라 그의 뜻구역이 달라진다.

문 제

1. 다음 제곱함수들의 뜻구역을 구하여라.

1) $y = x^3$ 2) $y = x^{-4}$ 3) $y = x^{\frac{1}{3}}$

4) $y = x^{\frac{1}{5}}$ 5) $y = \dfrac{1}{\sqrt[7]{x^3}}$ 6) $y = x^{\sqrt{2}}$

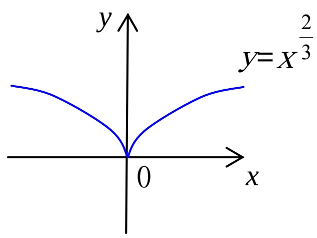


그림 2-19

2. 함수 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 의 그라프는 그림 2-19와 같다.
왜 그런가?

3. 다음 제곱함수의 그라프를 대강 그려보아라.
1) $y = x^3$ 2) $y = x^4$

련 습 문 제

1. 다음 식을 계산하여라.

1) $\left[7-3\left(\frac{5}{27}\right)^0\right]^{-3}$ 2) $\left[\frac{2^{-4}\cdot 23^0}{3^{-2}}\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]^{-1}$ 3) $\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

2. 다음 식을 지수가 부의 옹근수제곱이 없게 변형하여라.

1) $-3ab^{-4}c^4 3a^{-2}bc^{-4}$ 2) $\frac{2x^{-3}y^{-1}z^{-2}}{3x^{-5}y^2z^{-3}}$ 3) $\frac{2^{-5}c^{-3}a^8b^2(a+b)^{-2}}{64^{-1}a^{12}b^{-13}c^7(a^2-b^2)^{-1}}$

3. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\frac{12^{\frac{1}{6}}a^{\frac{4}{5}}}{3^{\frac{1}{6}}4^{-\frac{5}{6}}a^{-0.1}}$ 2) $\frac{14^{\frac{3}{4}}b^{\frac{5}{9}}}{2^{1.75}\cdot 7^{-0.25}b^{-\frac{4}{9}}}$

3) $\frac{\sqrt[5]{b^2\sqrt{b}}\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}{b^{\frac{6}{15}}}$ 4) $\frac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{[a(a-b)]^2}}\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}(a\sqrt{a}-b\sqrt{b})}{\sqrt[3]{a-b}}$

4. 다음 방정식을 풀어라.

1) $(-3x)^3=81$ 2) $(x-5)^5+2=0$

3) $x-2^6-7=0$ 4) $3+2\sqrt[3]{x}=0$

5. 밑수의 인수가운데서 제곱 또는 뿌리기호밖에 내보낼수 있는것은 다 내보내여라.

1) $(-135)^{\frac{1}{3}}$ 2) $\sqrt[4]{1944}$ 3) $\sqrt{50a^2}$ 4) $(162a^4)^{\frac{1}{4}}$

5) $\sqrt[5]{96x^{12}y^7}$ 6) $\sqrt[3]{\frac{-x^7y^4}{a^4b^4}}$ 7) $\frac{ab}{uv}\sqrt[3]{\frac{118u^6v^5}{375a^4b^3}}$

6. 뿌리기호밖에 있는 인수를 안에 넣어라.

1) $3\sqrt{5}$ 2) $-2\sqrt[5]{\frac{1}{8}}$ 3) $ab\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ 4) $-3b\sqrt[4]{5}$

5) $(a-b)\sqrt{\frac{2a}{a^2-b^2}}$ 6) $(a+b)\sqrt[4]{\frac{6}{a^2-b^2}}$

7. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\frac{(a+b)^2}{c-d}\sqrt[3]{\frac{3(c^3-3c^2d+3cd^2-d^3)}{ab(a+b)^3}}$ 2) $\frac{3a-1}{2-b}\sqrt[12]{\frac{(2a+1)^{11}(a^2+2ab+b^2)}{(3a-1)^{24}(a^2-b^2)^2}}$

3) $(a^{-1}-b^{-1})(a^{-2}+b^{-2})\left(\frac{a+b}{ab}\right)^{-1}\left(\frac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}-\frac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)$

4) $\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}+\left(\frac{a-b}{ab}\right)^{-1}\right]\left[\left(\frac{a+b}{ab}\right)^{-1}-a\right]\div\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

8. 다음 식의 값을 구하여라.

1) x=12.25일 때 $\left(\sqrt[4]{x}-6\right)^2-12\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}-1\right)$

2) a=2.5일 때 $\dfrac{8}{\sqrt[4]{a}+2}+\dfrac{a-8\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}-4}$

9. 다음 식의 값은 자연수 n에 관계없이 일정한 값을 가진다는것을 증명하여라.

1) $\dfrac{\sqrt{9^n-9^{n-1}}}{\sqrt[3]{27^{n-1}-19\cdot 27^{n-2}}}$　　2) $\dfrac{\sqrt[3]{8^{n-2}+7\cdot 8^{n-3}}}{\sqrt[4]{16^{n-1}-16^{n-2}}}$

10. $n\in\mathrm{N}$이고 a, b가 서로 다른 정의 옹근수일 때 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$과 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 가운데서 어느것이 큰가를 따져보아라.

11. $\sqrt[3]{\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ 의 값은 (　　)이다.

1) 정수　　2) 부수　　3) 0　　4) 확정할수 없다.

12. 다음 식을 간단히 하여라.

$$(1+2^{-\frac{1}{32}})\cdot(1+2^{-\frac{1}{16}})\cdot(1+2^{-\frac{1}{8}})\cdot(1+2^{-\frac{1}{4}})\cdot(1+2^{-\frac{1}{2}})$$

13. 함수 $y=x^2,\ y=x^{-2},\ y=\sqrt[3]{x},\ y=\dfrac{x}{3}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 함수를 모두 써라.

1) $f(-x)=-f(x)$를 만족하는 함수는 _____이다.

2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$를 만족하는 함수는 _____이다.

3) $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족하는 함수는 _____이다.

4) $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$를 만족하는 함수는 _____이다.

14. $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-2}+2\sqrt[3]{9}}$ 에 가장 가까운 옹근수는 (　　)이다.

1) 1　　2) 2　　3) 3　　4) 4

15. $a<b<0$이면 아래의 결론이 옳은것은 어느것인가?

1) $\sqrt{a}<\sqrt{b}$　　2) $\dfrac{1}{2^a}<\dfrac{1}{2^b}$　　3) $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$　　4) 앞의것들은 옳지 않다.

16. $x=\dfrac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}}\right)$일 때 $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$을 계산하여라.

복 습 문 제

1. 다음 함수가운데서 짝함수, 홀함수를 각각 가려내여라.

 1) $y=\frac{2}{5}x^4-0.7x^2-5$　　2) $y=\frac{9^{-0.4}}{x-4x^3}$

 3) $y=\frac{1}{2}x^3-5$　　4) $y=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{\frac{x^2+1}{3-x^2}}$

2. $f_1(x)$, $f_2(x)$가 짝함수이고 $g_1(x)$, $g_2(x)$가 홀함수일 때 다음 함수의 짝홀성을 구하여라.

 1) $f_1(x)-f_2(x)$　　2) $f_1(x)\div f_2(x)$　　3) $g_1(x)\div g_2(x)$

 4) $g_1(x)-g_2(x)$　　5) $f_1(x)\cdot g_1(x)$　　6) $f_1(x)\div g_1(x)$

3. 함수 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$가 짝함수로 되기 위한 조건을 구하여라.

4. 함수 $f(x)=\frac{1-2x}{1+x}$에서 함수 $g(x)$의 그라프와 $y=f^{-1}(x+1)$의 그라프가 $y=x$에 관해 대칭이라면 $g(1)$의 값은 얼마인가?

5. $y=f(x)$에 거꿀함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재한다. $y=f(x)$의 그라프를 원점주위로 시계바늘이 도는 방향으로 90° 돌리면 다음 함수 (　)의 그라프를 얻는다.

 1) $y=f^{-1}(-x)$　　2) $y=f^{-1}(x)$　　3) $y=-f^{-1}(x)$　　4) $y=-f^{-1}(-x)$

6. $f(x)=\sqrt{ax+b}$와 $f^{-1}(-x)$가 모두 점 (1, 2)를 지난다면 $f(x)$와 $f^{-1}(-x)$의 그라프가 사귀는 점의 개수는 (　)이다.

 1) 1　　2) 2　　3) 3　　4) 없다.

7. $y=\frac{1}{1-x^2}(x<0)$의 거꿀함수를 구하여라.

8. $f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$일 때 $f(x)$를 구하여라.

9. $f\{f[f(x)]\}=27x+13$일 때 $f(x)$를 구하여라. ($f(x)$:여러마디식)

10. $f(x)=ax^3+x^2+bx-8$이고 $f(-2)=10$일 때 $f(2)$의 값을 구하여라.

11. 함수 $y=\frac{1}{x}$를 변환하는 방법으로 다음 함수의 그라프를 대강 그려라.

 1) $y=\frac{7}{x-3}$　　2) $y=\frac{16}{x+7}$　　3) $y=\frac{9x}{3x+1}$

12. 함수 $y=\sqrt{x}$ 를 변환하는 방법으로 다음 함수의 그라프를 대강 그려라.

1) $y=3\sqrt{x}+2$　　2) $y=\sqrt{x-3}+4$

3) $y=2\sqrt{2x+1}+3$　　4) $y=3\sqrt{2-x}-7$

13. 다음 함수의 뜻구역을 구하여라.

1) $y=3\sqrt{2x^2}+\dfrac{4}{3\sqrt{x}}$　　2) $y=\left(\dfrac{x+2}{x^2-1}\right)^{\sqrt{7}}$

14. $a>0,\ \ n>1\ (n\in \mathrm{N})$ 일 때

$$\sqrt[n]{a^{n+1}},\ \sqrt[n+1]{a^n},\ \sqrt[n-1]{a^n},\ \sqrt[n]{a^{n-1}},\ \sqrt[n+1]{a^{n-1}},\ \sqrt[n-1]{a^{n+1}}$$

가운데서 어느것이 제일 크고 어느것이 제일 작은가?

15. 다음 식을 제곱으로 고쳐서 간단히 하여라.

1) $\dfrac{\sqrt[4]{a^2}\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[3]{a^4}}$　　2) $\dfrac{\sqrt[5]{b^2\sqrt{b}}\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}{\sqrt[30]{b^{12}}}$

16. $f(n)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ 일 때 다음 같기식이 성립한다는것을 밝혀라.

$$f(100)+f(101)=f(102)$$

17. 다음 같기식을 증명하여라.

$$\left(\frac{2a^2+3+a\sqrt{4a^2+3}}{2a^2+1+a\sqrt{4a^2+3}}\right)^{-0.5}=\frac{a+\sqrt{4a^2+3}}{3\sqrt{a^2+1}}$$

18. $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3(x>0)$ 일 때 $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x+x^{-1}+3}$ 의 값을 구하여라.

19. $y=\dfrac{1}{x}$ 또는 $y=\sqrt{x}$ 의 그라프를 변환하는 방법으로 다음 함수의 그라프를 대강 그려라.

1) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$　　2) $y=\dfrac{9x+3}{3x-1}$

3) $y=-\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{3}{4}$　　4) $y=\sqrt{2-4x}+\dfrac{2}{5}$

20. 다음 식을 계산하여라.

1) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}(a-b)-\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$

2) $\dfrac{2}{1+a^{\frac{1}{8}}}+\dfrac{2}{1-a^{\frac{1}{8}}}+\dfrac{4}{1+a^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{8}{1+a^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{16}{1+a}$

3) $\left[\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}-(xy)^{\frac{1}{2}}\right]\div(x-y)+\dfrac{2y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$

21. $x=\sqrt{15-6\sqrt{3}+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ 일 때 $\dfrac{1}{x^2-3\sqrt{3}x+7}$ 의 값을 소수점아래 세자리까지 계산하여라.

22. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$　　2) $\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{3}}+\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{3}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$

23. $x=\dfrac{1}{2}(1991^{\frac{1}{n}}-1991^{-\frac{1}{n}})\ (n\in\mathrm{N})$ 일 때 $\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^n$ 의 값을 구하여라.

24. $x-\dfrac{1}{x}=3$ 일 때 $\dfrac{x^{10}+x^8+x^2+1}{x^{10}+x^6+x^4+1}$ 의 값을 구하여라.

25. $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ 일 때 $\dfrac{x^6+14x^3+50}{x^2+2x+2}$ 의 값을 구하여라.

탐 구

함수 $y=x^n\ (x\in Z)$ 에 대한 성질

1) 함수 $y=x^{2k}\ (k\in\mathrm{N})$ 의 성질

함수 $y=x^2$, $y=x^4$ 의 그라프를 그려보면서 생각하여라.

2) 함수 $y=x^{2k+1}\ (k\in\mathrm{N})$ 의 성질

3) 함수 $y=x^{-2k}\ (k\in\mathrm{N})$ 의 성질

함수 $y=x^{-2}$, $y=x^{-4}$ 의 그라프를 그려보면서 생각하여라.

4) 함수 $y=x^{-(2k-1)}\ (k\in\mathrm{N})$ 의 성질

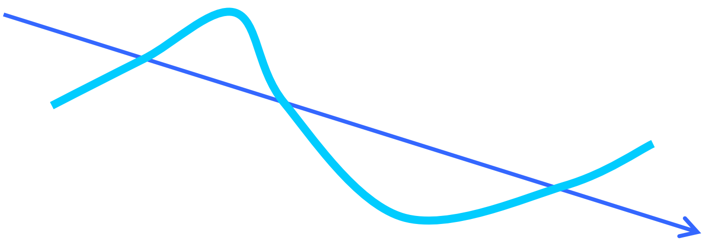
제3장. 방정식과 안갈기식



분수방정식과 분수안갈기식

무리방정식과 무리안갈기식

갈기식과 안갈기식의 증명



제1절. 분수방정식과 분수안같기식

1. 분수방정식

찾기 다음 방정식들가운데서 분수식이 들어있는 방정식을 가려내여라.

1) $3x+8=\dfrac{6}{5x-1}$ 2) $x^2+\dfrac{1}{5}x=36$ 3) $\dfrac{x-4}{x-1}=\dfrac{x-1}{x}$

분수식이 들어있는 방정식을 분수방정식이라고 부른다.

찾기 다음과 같이 얻어진 풀이가 주어진 방정식의 풀이로 되는가? 왜 그런가?

$$\frac{x(x^2-2x+1)}{x-1}=0 \Rightarrow \frac{x(x-1)^2}{x-1}=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \ \Rightarrow \text{풀이모임 } \{0,1\}$$

분수방정식은 오른변이 0이 되게 변형하고 통분하여 $\dfrac{B}{A}=0$ 모양으로 고친 다음 약분하지 않고 푼다. 이때

$$\frac{B}{A}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} B=0 \\ A\neq 0 \end{cases}$$

례 1 다음 분수방정식을 풀어라.

$$\frac{x-5}{x^2-1}+3=\frac{2}{1-x}$$

(풀이) 오른변을 왼변으로 옮기고 통분하면

$$\frac{x-5+3(x^2-1)+2(x+1)}{x^2-1}=0$$

분자를 정돈하고 인수분해하면

$$\frac{3(x-1)(x+2)}{x^2-1}=0$$

이로부터

$$\begin{cases} 3(x-1)(x+2)=0 & ① \\ x^2-1\neq 0 & ② \end{cases}$$

①의 풀이 1과 -2가운데서 1은 조건 ②에 맞지 않는다.

풀이모임 {-2}

(다른 방법)

뜻구역 $x \neq \pm 1$이므로 두변에 분모의 최소공통배수 x^2-1을 곱하면

$$x-5+3(x^2-1)=-2(x+1)$$

이 방정식을 풀면 $3x^2+3x-6=0$

$$3(x-1)(x+2)=0$$

따라서 $x=1,\ x=-2$

그런데 1은 주어진 방정식의 뜻구역에 들지 않으므로 버린다.

풀이모임 $\{-2\}$

문 제

다음 방정식을 풀어라.

1) $\dfrac{4}{3x+2}-\dfrac{2}{5x-2}=0$

2) $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3x}{x+1}=\dfrac{x}{x-2}$

3) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x^2-1}=0$

4) $\dfrac{5}{3-\dfrac{2}{x-2}}=x$

례 2 큰 물주머니에 물을 채우기 위한 크기가 다른 양수기가 두대 있다. 두 양수기를 다 쓰면 물을 채우는데 2시간 24분 걸리고 한 양수기만 쓰면 다른 양수기보다 2시간 더 걸린다. 하나씩 쓰면 각각 몇시간 걸리겠는가?

(풀이) 큰 양수기로 물을 채우는데 걸린 시간을 x라고 하면

작은 양수기로 물을 채우는데 걸린 시간 $x+2$

채우려는 전체 물량을 1로 볼 때

한시간동안에 큰 양수기가 퍼올리는 물량은 $\dfrac{1}{x}$

작은 양수기가 퍼올리는 물량은 $\dfrac{1}{x+2}$

두 양수기가 한시간동안에 퍼올리는 물량은 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}$

한편 두 양수기를 다 쓰면 2시간 24분 걸리므로 한시간동안에

두 양수기가 퍼올리는 물량은 $\dfrac{1}{2\frac{2}{5}}$

문제의 조건으로부터 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2\frac{2}{5}}$

방정식을 풀면

$$\frac{-5x^2+14x+24}{12x(x+2)}=0$$

$$\begin{cases} -5x^2+14x+24=0 \\ 12x(x+2)\neq 0 \end{cases}$$

방정식을 풀면 $x=4$, $x=-\frac{6}{5}$

그런데 $-\frac{6}{5}$은 문제의 뜻에 맞지 않으므로 버린다.

답. 큰 양수기는 4시간, 작은 양수기는 6시간

문 제

1. 학생들속에서 책읽기운동을 널리 벌려 자연과 사회에 대한 폭넓고 깊은 지식을 소유할데 대하여 주신 위대한 령도자 **김정일**대원수님의 유훈을 높이 받들고 한 학생이 책을 5 000페지 읽을 계획을 세웠는데 매일 꼭같은 페지수를 읽기로 하였다. 그런데 그가 매일 10페지씩 더 읽기로 한다면 계획을 25일간 앞당길수 있다고 한다. 계획일수는 얼마였는가?
2. 어떤 작업반에서 480m 구간의 도로포장을 하는데 매일 작업량을 16m씩 넘쳐한 결과 기한을 5일간 앞당겼다. 며칠동안에 끝낼 계획이였는가?
3. 대형랭장운반선이 실어온 물고기를 3대의 기중기로 부리려고 한다. 기중기를 하나씩 쓰면 3대를 다 쓰는것보다 첫째것은 6시간, 둘째것은 15시간 더 걸리고 셋째것은 2배의 시간이 걸린다. 3대를 동시에 다 쓰면 몇시간이 걸리겠는가?

2. 분수안갈기식

찾 기 다음 안갈기식들가운데서 분수식이 들어있는 안갈기식을 가려내여라.

1) $2x+7-\frac{1}{3x+2}>0$　　2) $0.5x+\frac{3x+2}{x^2+2x}<0$

3) $2x^2+5x>\frac{3x+2}{27}$　　4) $\frac{x-7}{x^2}>\frac{2x^2+3}{x+9}$

> 분수식이 들어있는 안갈기식을 분수안갈기식이라고 부른다.

알아보기 다음과 같이하여 얻은것이 주어진 안같기식의 풀이인가?

$$\frac{x+1}{x-1}\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ x-1\ge 0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x+1\le 0 \\ x-1\le 0 \end{cases} \Rightarrow x\ge 1 \text{ 또는 } x\le -1$$

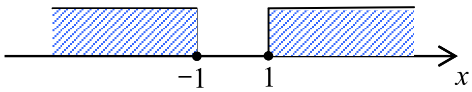


그림 3-1

분수안같기식은 오른변이 0이 되게 변형하고 통분하여 $\frac{A}{B}\ge 0$ (또는 >, <, ≤)모양으로 고친 다음 푼다.

이때 $\frac{A}{B}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A\ge 0 \\ B>0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A\le 0 \\ B<0 \end{cases}$

례 1 다음 안같기식을 풀어라.

$$\frac{1}{x}+\frac{2x}{x-1}\ge 2$$

(풀이) 오른변이 0이 되게 마디를 옮기면

$$\frac{1}{x}+\frac{2x}{x-1}-2\ge 0$$

왼변을 통분하고 정돈하면 $\frac{3x-1}{x(x-1)}\ge 0$

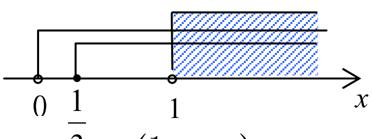
그리하여

$$\begin{cases} 3x-1\ge 0 \\ x(x-1)>0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} 3x-1\le 0 \\ x(x-1)<0 \end{cases}$$

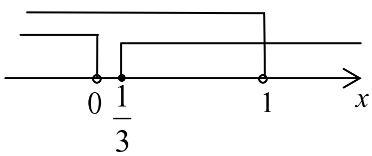
따라서

(1) $\begin{cases} 3x-1\ge 0 \\ x>0 \\ (x-1)>0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x-1\ge 0 \\ x<0 \\ (x-1)<0 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 3x-1\le 0 \\ x>0 \\ (x-1)<0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 3x-1\le 0 \\ x<0 \\ (x-1)>0 \end{cases}$

그리하여



(1)



(2)

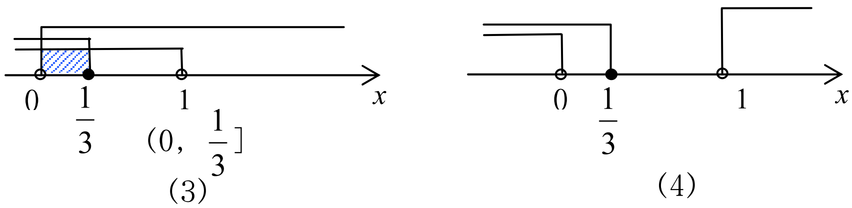


그림 3-2

따라서 풀이모임 $(0,\ \frac{1}{3}]\cup(1, +\infty)$

례 2 다음 안같기식을 풀어라.

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x+2}\le 0$$

(풀이) 뜻구역 $x\neq-2$

량변에 $(x+2)^2$을 곱하면

$$(x-1)(x+1)(x+2)\le 0$$

안같기식의 왼변 $(x-1)(x+1)(x+2)$의 값은 $x=1,\ -1,\ -2$에서 0이다.

이제 구간 $(-\infty,\ -2)$, $(-2,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ +\infty)$에서 왼변의 부호를 알아보면

	$(-\infty,\ -2)$	$(-2,\ -1)$	$(-1,\ 1)$	$(1,\ +\infty)$
$x+2$	−	+	+	+
$x+1$	−	−	+	+
$x-1$	−	−	−	+
$(x-1)(x+1)(x+2)$	−	+	−	+

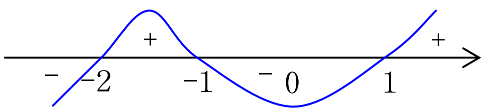


그림 3-3

그리하여 $(-\infty,\ -2)$, $(-1,\ 1)$에서 $(x-1)(x+1)(x+2)<0$

이때 $x=1,\ -1,\ -2$에서 왼변의 값은 모두 0이다.

여기서 $x+2\neq0$이므로 풀이모임은 $(-\infty,\ -2)\cup[-1,\ 1]$

례 3 다음 안같기식을 풀어라.

$$\frac{(x-1)^3}{x+1}\le 0$$

(풀이)

	$(-\infty,\ -1)$	$(-1,\ -1)$	$(1,\ +\infty)$
$x-1$	−	−	+
$x-1$	−	−	+
$x-1$	−	−	+
$x+1$	−	+	+
$\frac{(x-1)^3}{x+1}$	+	−	+

그리하여 (-1, 1)에서 $\frac{(x-1)^3}{x+1}<0$

이때 x=1에서 왼변의 값은 0이고 x=-1에서 왼변은 뜻을 가지지 않으므로

풀이모임은 (-1, 1]

문 제

1. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $\frac{2}{x+1}>\frac{x}{x-2}$ 2) $\frac{4}{3x+2}<\frac{2}{5x-2}$ 3) $-1<\frac{x}{2x-1}<1$

2. 농도가 5%인 소금물 100g이 있다. 여기에 물 몇g을 넣으면 농도가 2%와 2.5% 사이에 있는 소금물로 되겠는가?

련 습 문 제

1. 다음 방정식을 풀어라.

1) $\frac{1}{x(x-1)}=\frac{2}{x^2-1}$ 2) $\frac{3x-7}{x+5}=\frac{x-3}{x+2}$

3) $\frac{2x-5}{x-1}=\frac{5x-3}{3x+5}$ 4) $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$

2. 방정식 $x^2+3x-\frac{3}{x^2+3x-7}=9$ 의 모든 실수풀이의 적은 얼마인가?

3. 위대한 령도자 **김정일**대원수님께서 기술혁신운동을 힘있게 벌릴데 대하여 주신 유훈을 높이 받들고 한 선반공이 720개의 기계부속품을 깎을 과제를 기술혁신을 하여 매일 깎아야 할 계획보다 12개씩 더 깎아 16일간이나 앞당겨 끝냈다. 선반공은 처음 며칠동안에 깎을 과제를 받았는가?

4. 2대의 뻐스가 A와 B에서 각각 서로 마주 향하여 같은 시각에 떠나서 3시간만에 만났다. 두 뻐스는 계속 가던 방향으로 달렸는데 A를 떠난 뻐스는 B

에서 떠난 뻐스보다 $2\frac{1}{2}$시간만큼 더 늦게 B에 도착하였다. 두 뻐스는 A와 B 사이를 각각 몇시간동안에 달렸는가?

5. 강을 따라 12Km 떨어져있는 부두사이를 려객선이 갔다오는데 1시간 40분이 걸렸다. 강물의 속도가 3Km/h라면 려객선의 속도는 얼마이겠는가?

6. 어떤 동덩어리에 아연 2Kg을 넣어 합금을 만들었다. 이 합금 3Kg에 또 아연 3Kg을 넣어 녹인 결과 동과 아연의 비가 1:2인 합금을 얻었다. 처음에 동은 얼마였는가?

7. 안갈기식 $\left|\frac{x+3}{x-1}\right| \geq \frac{x+3}{x-1}$의 풀이모임은 ( )이다.

1) x는 모든 실수　　　　2) $x>1$ 또는 $x\leq-3$

3) $-3\leq x<1$　　　　4) 우의 답이 모두 틀린다.

8. 다음 분수안갈기식을 풀어라.

1) $\frac{4}{x^2}>1+\frac{3}{x}$　　2) $\frac{x+3}{x^2+3x+2}>0$　　3) $\frac{(x+1)(x-2)^2}{x(x-3)}\geq 0$

9. 8%의 소금물과 5%의 소금물을 1:x의 비로 혼합하여 y%의 소금물을 만들었다. y를 x의 식으로 표시하고 그라프를 그려라. 또 농도가 7%이상인 소금물을 만들기 위해서는 얼마의 비률로 혼합하면 되겠는가?

제2절. 무리방정식과 무리안갈기식

1. 무리방정식

찾기 다음 방정식들가운데서 무리식이 들어있는 방정식을 가려내여라.

1) $\sqrt{x+1}+x^2=0$　2) $\sqrt{39}+2x+7=0$　3) $\sqrt[3]{x^2+3}+3x+7=0$

무리식이 들어있는 방정식을 무리방정식이라고 부른다.

다음 방정식의 두 변을 각각 2제곱, 3제곱하여 풀고 이때 얻어진 풀이가 주어진 방정식에 맞는가를 따져보아라.

1) $\sqrt{x+1}=5-x$　　2) $\sqrt[3]{2x-9}=-3$

알아보기 무리방정식을 풀 때 주어진 방정식에 맞지 않는 풀이가 어떤 경우에 생기는가?

무리방정식을 풀 때 다음과 같이 한다.

1) 뿌리기호를 없앤 다음에 푼다.

2) 풀이가 주어진 방정식에 맞는가를 따져본다.

(1) 짝수차뿌리만 들어있을 때에는 끼여든 풀이가 있는가를 따져본다.

(2) 홀수차뿌리만 들어있을 때에는 주어진 방정식의 풀이로 된다.

례 1 $\sqrt[3]{37+x}-\sqrt[3]{x}=1$을 풀어라.

(풀이) 왼변의 둘째 마디를 오른변에로 옮기면

$$\sqrt[3]{37+x}=1+\sqrt[3]{x}$$

두 변을 각각 3제곱하면

$$37+x=1+3\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x^2}+x$$

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-12=0$$

$$\left(\sqrt[3]{x}-3\right)\left(\sqrt[3]{x}+4\right)=0$$

$$x=27,\ x=-64$$

따라서 풀이모임 {27, -64}

례 2 $\sqrt{9-x^2}=ax+3$을 풀어라.

(풀이) 두 변을 각각 2제곱하면

$$9-x^2=a^2x^2+6ax+9$$

방정식의 풀이를 구하면

$$x\left[(a^2+1)x+6a\right]=0$$

$$x=0,\quad x=-\frac{6a}{a^2+1}$$

구한 풀이는 조건 $ax+3\geq 0$에 맞아야 한다.

$a^2\leq 1$일 때 풀이 0, $-\frac{6a}{a^2+1}$는 주어진 방정식에 다 맞는다.

$a^2>1$일 때는 0만 맞는다.

이리하여 풀이모임은

$a^2\leq 1$ 즉 $-1\leq a\leq 1$일 때 $\{0,\ -\frac{6a}{a^2+1}\}$

$a^2>1$ 즉 $a<-1$ 또는 $a>1$일 때 $\{0\}$

문 제

1. 방정식 $2\sqrt{x-3}+6=x$의 풀이는 ( )개이다.

1) 3　　　2) 2　　　3) 1　　　4) 실수풀이가 없다.

2. 다음 방정식을 풀어라.

1) $\sqrt{x-2}-\sqrt{6x-11}+\sqrt{x+3}=0$

2) $\sqrt{7x-5}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{7x-4}+\sqrt{4x-2}$

3) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=4\sqrt{x^2-1}$

4) $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$

3. 다음 방정식을 풀어라.

1) $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=\dfrac{b}{\sqrt{x-a}}+\dfrac{a}{\sqrt{x-b}}$　　　2) $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}=\sqrt[3]{a-b}$

2. 무리안갈기식

찾기 다음 안갈기식들가운데서 무리식이 들어있는 안갈기식을 가려내여라.

1) $\sqrt{2x-3}+x>0$　　　2) $\sqrt{3x^2+7x}\le 0$

3) $\sqrt[3]{2^7x+x^3}\ge 0$　　　4) $\sqrt{x}\le x+2$

> 무리식이 들어있는 안갈기식을 무리안갈기식이라고 부른다.

무리안갈기식 $\sqrt{A}<B$, $\sqrt{A}>B$ 모양의 안갈기식을 자주 쓴다.

알아보기 $\sqrt{A}<B$에서

1) A를 구하려면 량변을 어떻게 해야 하는가?

2) 웃식의 량변을 2제곱하려면 A와 B에 어떤 조건이 있어야 하는가?

3) 주어진 식에서 A를 구하려면 다음과 같은 련립안갈기식을 풀면 되는가?

$$\begin{cases} A \ge 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$$

례 1 다음 안갈기식을 풀어라.

$$\sqrt{3x+7}<x+1$$

(풀이) $\begin{cases} 3x+7\geq 0 & ① \\ x+1>0 & ② \\ 3x+7<(x+1)^2 & ③ \end{cases}$

식 ①을 풀면 $x\geq -\frac{7}{3}$

식 ②를 풀면 $x>-1$

식 ③을 풀면 $3x+7<x^2+2x+1$

$x^2-x-6>0$

$(x-3)(x+2)>0$

따라서 $x<-2$ 또는 $x>3$

식 ①, ②, ③으로부터

$$[-\frac{7}{3},\ +\infty)\cap(-1,\ +\infty)\cap((-\infty,\ -2)\cup(3,\ +\infty))=(3,\ +\infty)$$

풀이모임 (3, +∞)

문 제

다음 무리안갈기식을 풀어라.

1) $\sqrt{x+1}<3-x$ 2) $\sqrt{2x+1}-x+4<0$ 3) $x-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$

알아보기 $\sqrt{A}>B$에서

1) 주어진 식의 량변을 2제곱하려면 왼쪽과 오른쪽에 어떤 조건이 있어야 하는가?

2) 주어진 식에서 오른변이 부수이면 주어진 뜻구역에서는 언제나 안갈기식을 만족시키는가?

3) 주어진 식에서 A를 구하려면 다음과 같은 련립안갈기식을 풀면 되는가?

$$\begin{cases} A\geq 0 \\ B<0 \end{cases} \quad 또는 \quad \begin{cases} A>0 \\ B\geq 0 \\ A>B^2 \end{cases}$$

례 2 다음 안갈기식을 풀어라.

$$\sqrt{x^2-25}>x-1$$

(풀이) 다음 련립안갈기식의 풀이를 구하면 된다.

1) $\begin{cases} x^2-25\ge 0 & ① \\ x-1<0 & ② \end{cases}$　　2) $\begin{cases} x^2-25>0 & ① \\ x-1\ge 0 & ② \\ x^2-25>(x-1)^2 & ③ \end{cases}$

1) ①을 풀면 $x^2-25\ge 0$

$(x+5)(x-5)\ge 0$

$\therefore\ x\in(-\infty,\ -5]\cup[5,\ +\infty)$

②를 풀면 $x-1<0$

$\therefore\ x\in(-\infty,\ 1)$

1)의 풀이모임은 ①∩②이므로 $(-\infty,\ -5]$

2) ①을 풀면 $x\in(-\infty,\ -5)\cup(5,\ +\infty)$

②를 풀면 $x\in[1,\ +\infty)$

③을 풀면 $x^2-25>x^2-2x+1$

$x>13$

$\therefore\ x\in(13,\ +\infty)$

2)의 풀이모임은 ①∩②∩③이므로 $(13,\ +\infty)$

주어진 안갈기식의 풀이모임은 1)과 2)의 풀이모임의 합이므로

$$(-\infty,\ -5\ ]\cup(13,\ +\infty)$$

문 제

다음 안갈기식을 풀어라.

1) $\sqrt{x^2+2}>2x^2$　　2) $x-\sqrt{x^2-x-6}<-1$　　3) $x+2>\sqrt{4x+7}>x-1$

례 3 다음 안갈기식을 풀어라.

$$\sqrt{x^2-2ax-1}>2x-a$$

(풀이) 뿌리기호안의 식의 값이 부가 되지 말아야 하므로

$$x^2-2ax-1\ge 0$$

이것을 풀면 $x\ge a+\sqrt{a^2+1}$

$x\le a-\sqrt{a^2+1}$

(1) $2x-a<0$ 즉 $x<\dfrac{a}{2}$일 때 왼변은 부 아닌 값을 잡아야 한다.

그런데 $a-\sqrt{a^2+1}<\dfrac{a}{2}<a+\sqrt{a^2+1}$이므로 풀이모임은

$$(-\infty,\ \ a-\sqrt{a^2+1}\,]$$

(2) $2x-a\geq 0$ 즉 $x\geq\frac{a}{2}$ 일 때

두 변은 부가 아니므로 각각 2제곱하면

$$x^2-2ax-1>4x^2-4ax+a^2$$

$$3x^2-2ax+a^2+1<0$$

그런데 $3x^2-2ax+a^2+1=2x^2+(x-a)^2+1>0$이므로 이 경우는 성립하지 않는다.

따라서 풀이모임 $(-\infty,\ a-\sqrt{a^2+1}]$

문 제

다음 안같기식을 풀어라.

1) $\sqrt{2a(a-x)}>a-3x\ \ (a>0)$　　　2) $1+ax<\sqrt{1+x}$

련 습 문 제

1. 다음 무리방정식을 풀어라.

1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-1}$　　　2) $\sqrt{3x-10}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-5}$

3) $x^2-5x+2\sqrt{x^2-5x+3}=12$　　　4) $\sqrt{x^2+17}-\sqrt[4]{x^2+17}=6$

5) $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$　　　6) $x=\sqrt{4+2x\sqrt{x^2+5}}-2$

2. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $x+\sqrt{x-2}<2\left(x-\sqrt{x-2}\right)$　　　2) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1}>\sqrt{3x}$

3) $\sqrt{13x+5}-\sqrt{3x-1}>\sqrt{12x-4}$　　　4) $\sqrt{2(x-1)(x^2-2)}>2-x-x^2$

3. 반경이 R인 원둘레에 내접하는 직4각형의 면적이 한 변이 L인 바른4각형의 면적과 같아지기 위한 조건을 구하여라.

4. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $|x+1|<2$

$-2<x+1<2$, $-3<x<1$

2) $|3x-4|\leq 19$　　　3) $\left|\frac{x-1}{2}+4\right|>3$　　　4) $|x^2-3x+1|<5$

5. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $\sqrt{x(2-x)}>x-a$　　　2) $x+a>2a\sqrt{x-2}$

제3절. 같기식과 안같기식의 증명

1. 같기식의 증명

같기식의 두 변이 같은 식이면 그 같기식은 늘 성립한다고 말한다.

같기식에서 두 변이 같은 식이라는것을 밝히는것이 같기식의 증명이였다.

그러므로 늘 성립한다는것을 밝히는것이 같기식의 증명이다.

x에 관한 같기식 $3x+2=Ax+B$에서 A, B와 같이 보조적인 변수가 들어있는 같기식도 있다.

이때 A, B에 어떤 값을 주면 같기식의 두 변이 같은 식으로 되겠는가를 밝히는 문제도 제기된다. 이것도 넓은 뜻에서 같기식증명문제로 본다.

례 1 다음 같기식이 늘 성립하도록 A, B를 정하여라.

(풀이) $3x-5=A(x-2)+B$

$3x-5=Ax-(2A-B)$

따라서 $3=A$

$5=2A-B$

따라서 $A=3$, $B=1$

례 2 x의 임의의 값에 대하여 $ax^2+bx+c=0$의 값이 늘 0이 되려면 $a=b=c=0$이라는것을 증명하여라.

(증명) x의 임의의 값에 대하여

$$ax^2+bx+c=0$$

이라고 하면

$x=0$일 때 $a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0$

따라서 $c=0$

따라서 $ax^2+bx=0$

$x=1$일 때 $a+b=0$

$x=-1$일 때 $a-b=0$

이로부터 $a=b=0$ 즉 $a=b=c=0$

일반적으로 다음 사실이 성립한다.

정리 1. x의 임의의 값에 대하여

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

이면 $a_0=a_1\cdots=a_n=0$이다.

문 제

다음 갈기식이 늘 성립하도록 A, B, C, D를 정하여라.

1) $2x^2-6x+7=A(x+1)^2+B(x+1)+C$

2) $5x^3+6x^2+4x-7=A(x-3)^3+B(x-3)^2+C(x-3)+D$

3) $6x^3-4x^2+8x-2=A(x+1)^3+B(x+1)^2+C(x+1)+D$

례 3 다음 갈기식이 늘 성립하도록 A, B의 값을 정하여라.

$$\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

(풀이) 갈기식의 두 변에 x^2+x-2를 곱하면

$$2x+1=A(x+2)+B(x-1)$$

$$2x+1=(A+B)x+2A-B$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A-B=1 \end{cases}$$

이 련립방정식을 풀면 A=1, B=1

따라서

$$\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}$$

이와 같이 분수식을 그보다 간단한 분수식(분자, 분모의 차수가 보다 낮은 분수식)들의 합(차)으로 변형하는것을 **부분분수분해한다고** 말한다.

문 제

1. 다음 분수식을 부분분수분해하여라.

1) $\dfrac{x+5}{x^2+7x+12}$ 2) $\dfrac{12-x}{x(x-3)(x-4)}$ 3) $\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$

2. $\dfrac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$ 에서 A, B, C를 구하여라.

2. 안갈기식의 증명

정리 2. a, b가 정수이면 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ $\left(a=b\Leftrightarrow\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}\right)$

(증명) $a^2+b^2\geq 2ab$이므로 $(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\geq 2\sqrt{ab}$

따라서 $a+b \ge 2\sqrt{ab}$

즉 $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

여기서 $\dfrac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$ 를 각각 a, b의 산수평균(더하기평균), 기하평균(곱평균)이라고 부른다.

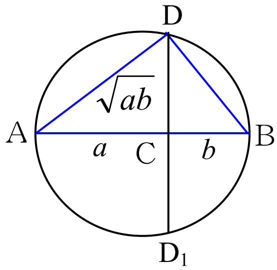


그림 3-4

이 정리를 도형의 성질을 써서 증명할수도 있다.

길이가 $a+b$인 선분을 직경으로 하여 원을 그리고 직경 AB우에서 AC=a, CB=b되게 점 C를 잡자.

점 C를 지나 직경 AB에 수직인 활줄 DD_1을 긋고 A와 D, D와 B를 맺자.

그러면 △ACD∽△DCB이다.

따라서 CD^2=CA·CB 즉 CD=$\sqrt{ab}$

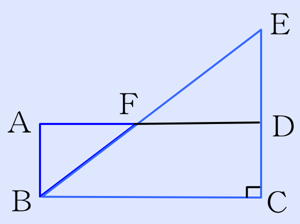
이때 원의 반경 $\dfrac{a+b}{2}$는 분명히 CD보다 크거나 같다. 즉 $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

여기서 점 C가 원의 중심에 놓일 때 즉 $a=b$일 때 같기기호가 성립하고 그 거꿀도 성립한다.

탐 구

1. 그림에서 △ABF, △BCE, 직4각형 ABCD의 면적들사이 관계를 리용하여 안갈기식 $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ $(a,\ b \ge 0)$을 증명하여보아라.

   BC=EC=$\sqrt{a}$, AB=$\sqrt{b}$

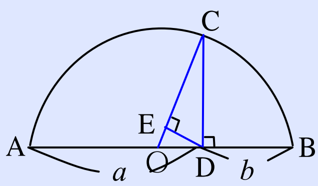


2. $\dfrac{2ab}{a+b}$를 a, b의 조화평균이라고 부른다.

   그림에서 OC≥CD≥CE이고 △OCD ∽ △DCE이다. 이 조건을 리용하여 안갈기식

$$\frac{1}{2}(a+b) \ge \sqrt{ab} \ge \frac{2ab}{a+b}\ (a,\ b>0)$$

   을 증명하여보아라.



례 1 x, y가 정수일 때 다음것을 증명하여라.

1) $xy=p$일 때 $x+y$는 $x=y$에서 최소값 $2\sqrt{p}$ 를 가진다.

2) $x+y=\mathrm{S}$일 때 xy는 $x=y$에서 최대값 $\frac{1}{4}\mathrm{S}^2$ 을 가진다.

(증명) x, y가 다 정수이므로

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$$

1) $xy=p$이므로 $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{p}$ 따라서 $x+y \ge 2\sqrt{p}$

웃식은 $x=y$일 때 같기가 성립하므로 $x=y$일 때 $x+y$는 최소값 $2\sqrt{p}$ 를 가진다.

2) $x+y=\mathrm{S}$이므로

$$\sqrt{xy} \le \frac{\mathrm{S}}{2}$$

따라서 $xy \le \frac{1}{4}\mathrm{S}^2$

웃식은 $x=y$일 때 같기가 성립하므로 xy는 최대값 $\frac{1}{4}\mathrm{S}^2$ 을 가진다.

례 2 a, b, c, d가 정수일 때 다음 안갈기식을 증명하여라.

$$(ab+cd)(ac+bd) \ge 4abcd$$

(증명) a, b, c, d가 정수이므로

$$\frac{ab+cd}{2} \ge \sqrt{ab \cdot cd} > 0$$

$$\frac{ac+bd}{2} \ge \sqrt{ac \cdot bd} > 0$$

따라서 $\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{4} \ge abcd$

즉 $(ab+cd)(ac+bd) \ge 4abcd$

탐 구

$\frac{x+y+z}{3} > \sqrt[3]{xyz}$ 를 증명하여라. (x, y, $z \ge 0$)

문 제

1. a, b, c가 정수일 때 $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$를 증명하여라.

2. x, y가 정수일 때 다음 안갈기식을 증명하여라.

1) $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\geq 2$ 2) $(x+y)(x^2+y^2)(x^3+y^3)\geq 8x^3y^3$

3. $x\neq 0$일 때 $x^2+\dfrac{81}{x^2}$의 최소값을 구하여라.

4. 둘레의 길이가 ℓ인 직4각형가운데서 면적이 제일 크려면 가로와 세로를 어떻게 잡아야 하는가?

안갈기식을 증명할 때 증명하려는 결과로부터 그것이 성립하기 위한 조건을 찾아 올라가다가 나중에 어떤 옳은것에 도달하면 주어진 안갈기식이 옳다고 결론하는 경우가 있다.

이런 증명방법을 해석적방법이라고 부른다.

례 3 $\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$를 증명하여라.

(증명) $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{5}$가 정수이므로

$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$가 서려면

$$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2<(2\sqrt{5})^2$$ 가 성립해야 한다.

이것을 전개하면

$10+2\sqrt{21}<20$

따라서 $2\sqrt{21}<10$, $\sqrt{21}<5$

량변을 2제곱하면 $21<25$

그런데 $21<25$는 옳다. 따라서 주어진 안갈기식은 옳다.

례 4 관으로 물을 뽑는데 물의 흐름속도가 같을 때 관의 수직자름면의 둘레의 길이가 같은 조건에서 자름면이 원인 경우가 바른4각형인 경우보다 물흐름량이 크다는것을 증명하여라.

(증명) 물의 흐름속도가 같을 때 관으로 흐르는 물의 량은 그 관의 자름면적에 의하여 정해진다. 자름면의 둘레의 길이를 ℓ로 표시하면 둘레의 길이가 ℓ인 원의 반경은 $\dfrac{\ell}{2\pi}$이고 자름면적은 $\pi\left(\dfrac{\ell}{2\pi}\right)^2$이다.

다음 둘레의 길이가 ℓ인 바른4각형의 변의 길이는 $\dfrac{\ell}{4}$이고 면적은

$$\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$$

그러므로 이 문제를 풀기 위해서는 $\pi(\frac{\ell}{2\pi})^2>(\frac{\ell}{4})^2$을 증명하여야 한다.

이제 $\pi(\frac{\ell}{2\pi})^2>(\frac{\ell}{4})^2$가 성립하려면 다음 식이 성립하여야 한다.

$$\frac{\pi\ell^2}{4\pi^2}>\frac{\ell^2}{16}$$

그런데 이 식의 량변에 $\frac{4}{\ell^2}$를 곱하면

$$\frac{1}{\pi}>\frac{1}{4} \qquad \text{즉} \qquad 4>\pi$$

그런데 이 식은 성립한다. 따라서 $\pi(\frac{\ell}{2\pi})^2>(\frac{\ell}{4})^2$

그리하여 관의 자름면이 원일 때 더 많은 량의 물이 흐른다.

문 제

1. $\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$를 증명하여라.
2. $(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)(c^2+d^2)$을 증명하여라.
3. $-1\le\frac{a^2-1}{a^2+1}\le1$을 증명하여라.

해보기 (｜5｜-｜-2｜)와 ｜5+(-2)｜, (｜5｜+｜-2｜)의 크기를 비교해보아라.

정리 3. $|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$

(증명) $-|a|\le a\le|a|$

$-|b|\le b\le|b|$이므로

$$-(|a|+|b|)\le a+b\le|a|+|b|$$

그리하여 $|a|+|b|\le|a|+|b|$ (1)

다음으로 $a=a+b-b,\ |-b|=|b|$은 (1)에 의하여

$|a|=|a+b-b|\le|a+b|+|-b|$

$|a|-|b|\le|a+b|$ (2)

(1), (2)에 의하여 $|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$

우의 정리에 의하여

$$|a_1+a_2+a_3|\le|a_1|+|a_2|+|a_3|$$

례 5 $|x|<\frac{\varepsilon}{3}$, $|y|<\frac{\varepsilon}{6}$, $|z|<\frac{\varepsilon}{9}$ 일 때 $|x+2y-3z|<\varepsilon$ 을 증명하여라.

(증명) $|x+2y-3z| \le |x|+|2y|+|-3z|$

$$=|x|+|2|\cdot|y|+|-3|\cdot|z|=|x|+2|y|+3|z|$$

그런데 $|x|<\frac{\varepsilon}{3}$, $|y|<\frac{\varepsilon}{6}$, $|z|<\frac{\varepsilon}{9}$ 이므로

$$|x|+2|y|+3|z|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{6}+\frac{3\varepsilon}{9}=\varepsilon$$

따라서 $|x+2y-3z|<\varepsilon$

례 6 a, b, c, d가 다 0이 아닌 실수일 때 다음 안갈기식을 증명하여라.

$$\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{d}\right|+\left|\frac{d}{a}\right|\ge 4$$

(증명) $\left|\frac{a}{b}\right|>0$, $\left|\frac{b}{c}\right|>0$, $\left|\frac{c}{d}\right|>0$, $\left|\frac{d}{a}\right|>0$이므로

$$\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|\ge 2\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|\cdot\left|\frac{b}{c}\right|}$$

$$=2\sqrt{\left|\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\right|}=2\sqrt{\left|\frac{a}{c}\right|} \qquad ①$$

$$\left|\frac{c}{d}\right|+\left|\frac{d}{a}\right|\ge 2\sqrt{\left|\frac{c}{d}\right|\cdot\left|\frac{d}{a}\right|}$$

$$=2\sqrt{\left|\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}\right|}=2\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|} \qquad ②$$

다음으로 $\sqrt{\left|\frac{a}{c}\right|}+\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\ge 2\sqrt{\sqrt{\left|\frac{a}{c}\right|}\cdot\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}}$

$$=2\sqrt{\sqrt{\left|\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}\right|}}=2 \qquad ③$$

따라서 ①, ②, ③에 의하여

$$\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{d}\right|+\left|\frac{d}{a}\right|\ge 2\sqrt{\left|\frac{a}{c}\right|}+2\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}=2\left(\sqrt{\left|\frac{a}{c}\right|}+\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right)\ge 4$$

문 제

1. $|a|<1,\ |b|<1$일 때 $\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$을 증명하여라.

2. $|h|<|\varepsilon|,\ |k|<\sqrt{\varepsilon}\,(\varepsilon>0)$일 때 $|hk|<\varepsilon$을 증명하여라.

련 습 문 제

1. 다음 같기식이 늘 성립하도록 A, B, C, D, E의 값을 정하여라.

   1) $3x^2-5x+7=A(x+3)^2+B(x+3)+C$

   2) $2x^4-3x^3+x^2-4=A(x-2)^4+B(x-2)^3+C(x-2)^2+D(x-2)+E$

   3) $x^4-2x^2+5x-3=A(x+1)^4+B(x+1)^3+C(x+1)^2+D(x+1)+E$

2. 다음 같기식이 늘 성립하도록 □안에 알맞는 수를 써넣어라.

   1) $2x^3-3x^2+\square x+\square=(\square x-1)(x-3)(x+\square)$

   2) $(x-2)(\square x-3)(3x+\square)=6x^3-5x^2+\square x+\square$

3. 다음 같기식이 늘 성립하도록 A, B의 값을 결정하여라.

   1) $\dfrac{x+1}{(3x+2)(5x+3)}=\dfrac{A}{3x+2}+\dfrac{B}{5x+3}$

   2) $\dfrac{2}{4x+3}+\dfrac{B}{7x+6}=\dfrac{Ax+27}{28x^2+45x+18}$

4. $|A-a|<\dfrac{\varepsilon}{2},\ \ |B-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$일 때 다음 안같기식을 증명하여라.

   1) $|(A+B)-(a+b)|<\varepsilon$ 2) $|(A-B)-(a-b)|<\varepsilon$

5. $|x|>r>0,\ a\neq 0$일 때 $\left|\dfrac{1}{ax}\right|<\dfrac{1}{|a|r}$을 증명하여라.

6. n이 자연수일 때 $\left|\dfrac{5n}{n+1}-5\right|\leq 0.001$을 풀어라.

7. 다음 안같기식을 증명하여라.

   1) $|a|+|b|\geq|a-b|$ 2) $|a|-|b|\leq|a-b|$

복 습 문 제

1. 다음 방정식을 풀어라.

1) $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}=2$ 2) $\frac{4x-9}{x-3}-\frac{x-2}{x-5}=\frac{4x-25}{x-7}-\frac{x-6}{x-9}$

3) $\frac{x-1+\frac{6}{x-6}}{x-2+\frac{3}{x-6}}=3$

2. 다음 방정식이 풀이를 가지기 위해서는 a가 어떤 값을 잡아야 하는가?

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+a}{x(x-1)}=0$$

3. 어떤 행군대오가 A로부터 100Km 떨어진 B로 가려고 한다. 대오의 절반은 차를 타고 나머지 절반은 걸어서 동시에 떠났다. 차를 타고 가던 사람들은 가던 도중에 내려서 걸었고 차는 되돌아서서 걸어오는 사람들을 마주 향하여 가서 그들을 태워가지고 B로 향하였다. 그리하여 목적지 B에 전체 성원들이 동시에 도착하였다. 차의 속도는 40km/h, 걷는 속도는 4km/h일 때 A로부터 B까지 가는데 걸린 시간을 구하여라.

4. 다음 무리방정식을 풀어라.

1) $2x+3+\sqrt{2x+3}=12$ 2) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5$

3) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{1-2x}=\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$ 4) $\sqrt{3x+2}-6=\sqrt[4]{3x+2}$

5. 방정식 $\sqrt{x-p}=x$이 두개의 서로 다른 실수풀이를 가진다면 실수 p의 값범위는 ( )이다.

1) $p\le 0$ 2) $p<\frac{1}{4}$ 3) $0\le p<\frac{1}{4}$ 4) $p\ge\frac{1}{4}$

6. 다음 무리안갈기식을 풀어라.

1) $\sqrt{3-x}\ge x-2$ 2) $\sqrt{25-x^2}<\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}$ 3) $\sqrt{2x-x^2}<|x-1|$

7. 다음 무리안갈기식을 증명하여라.

1) $a+b\ge 0$, $c+d\ge 0$일 때 $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(c+d)\ge\sqrt{(a+b)(c+d)}$

2) $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때 $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$

3) $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\ge 4\frac{\sqrt{ab}}{c}$

4) $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$일 때 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{d}{c}+\frac{c}{d}\ge 4$

8. a, b, c가 다는 같지 않은 정수일 때

$(ab+a+b+1)(ab+ac+bc+c^2)\ge 16abc$를 증명하여라.

9. 직3각형의 두 직각변의 합이 10cm이다. 면적이 제일 클 때 빗변의 길이를 구하여라. 이때 이 최대면적을 구하여라.

10. $a>b>c$일 때 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0$을 증명하여라.

11. $x>0$, $x\neq1$, $n\in$N일 때 $(1+x^n)(1+x)^n>2^{n+1}x^n$을 증명하여라.

12. 정해진 둘레의 길이를 가지는 부채형에서 반경이 얼마일 때 그 면적이 제일 크겠는가?

13. 다음 안같기식을 풀어라.

1) $\left|5x-x^2\right|>6$　　　　2) $\left|x^2+3x-8\right|<10$

3) $\frac{6x^2-17x+12}{2x^2-5x+2}>0$　　　　4) $\frac{(3x-2)(x-2)}{(x-4)^2}<\frac{(2x+2)(x-2)}{(x-4)^2}$

14. $a=2-\sqrt{5}$, $b=\sqrt{5}-2$, $c=5-2\sqrt{5}$이면 (　)이다.

1) $a<b<c$　2) $a<c<b$　3) $b<a<c$　4) $c<a<b$

15. 다음 같기식이 늘 성립하게 A, B, C, D의 값을 정하여라.

1) $\frac{5x^2+5x}{x^3+2x^2+x+2}=\frac{\mathrm{A}}{x+2}+\frac{\mathrm{B}x+c}{x^2+1}$

2) $\frac{3x-7}{(x+3)(x+1)^3}=\frac{\mathrm{A}}{x+3}+\frac{\mathrm{B}}{x+1}+\frac{\mathrm{C}}{(x+1)^2}+\frac{\mathrm{D}}{(x+1)^3}$

16. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $abc=1$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$일 때 $\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-ac}+\frac{1}{1-bc}=1$

2) $x=\frac{a-b}{a+b}$, $y=\frac{b-c}{b+c}$, $z=\frac{c-a}{c+a}$일 때 $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$

3) $x=a(y+z)$, $y=b(z+x)$, $z=c(x+y)$일 때 $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$

17. $x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n=1$이고 x_1, x_2, $\cdots$, $x_n>0$일 때

$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geq2^n$을 증명하여라.

18. a, b, c가 △ABC의 세 변일 때

$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$를 증명하여라.

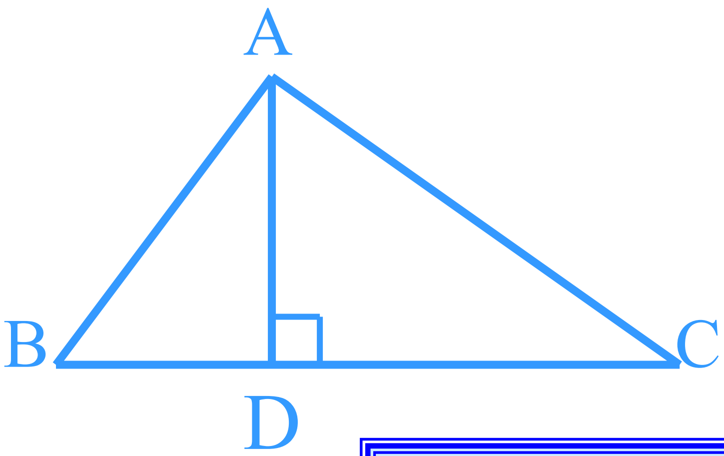
19. 다음 안같기식을 증명하여라.

1) $|a-b|\leq|a-c|+|b-c|$　　　　2) $\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\geq\frac{|a+b|}{1+|a+b|}$

20. a, b가 서로 다른 상수일 때 안같기식 $|ax+2|\geq|2x+b|$가 늘 성립하게 하려면 a, b가 (　)을 만족시켜야 한다.

1) $|a|\geq2$　2) $ab=3$　3) $|a|>2$, $ab=4$　4) $|a|\geq2$, $ab=3$

제 4 장. 도형에서의 크기관계

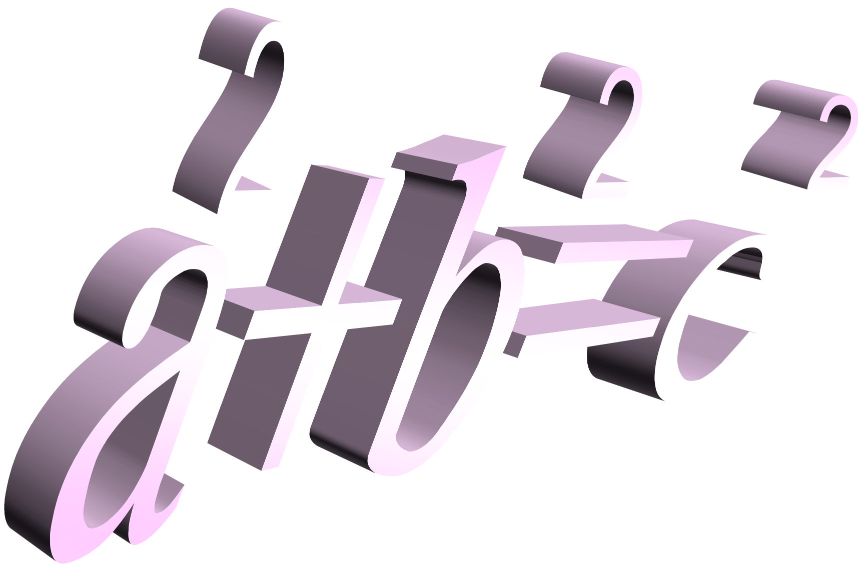


3각형에서의 크기관계

3각형의 아낙각과 바깥각

원에서의 크기관계

자리길 증명



제 1 절. 3 각형에서의 크기관계

1. 3각형의 각과 변의 크기관계

알아보기 3각형의 한 변은 다른 두 변의 합보다 작다는것을 잘 알고있다.
3각형의 세 변을 a, b, c라고 하면
$a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$이다.
3각형의 세변을 큰것으로부터 차례로 a, b, c라고 하면
$a-b<c$, $b-c<a$, $a-c<b$이겠는가?

정리 1. △ABC 에서

1) $\angle B>\angle C \Rightarrow b>c$
2) $\angle B<\angle C \Rightarrow b<c$
3) $\angle B=\angle C \Rightarrow b=c$

(증명) 먼저 1)을 증명하자.
변 AC에 $\angle DBC=\angle C$되게 점 D를 찍으면
△ABD에서
$$AD+DB>AB$$
그런데 DB=DC (△DBC는 2등변3각형)
따라서
$$AD+DC>AB$$
즉 $b>c$
마찬가지로 2) 도 증명된다.
3)은 2등변3각형이 될 조건에 의하여 나온다.

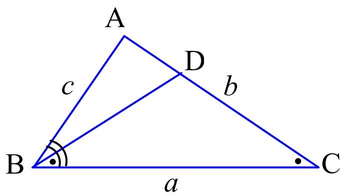


그림 4-1

정리 2. (거꿀정리) △ABC 에서

1) $b>c \Rightarrow \angle B>\angle C$
2) $b<c \Rightarrow \angle B<\angle C$
3) $b=c \Rightarrow \angle B=\angle C$

(증명) 먼저 1)을 귀유법으로 증명하자.
이제 $\angle B>\angle C$가 아니라고 하자.
그러면 $\angle B<\angle C$이거나 $\angle B=\angle C$이다.
그러면 정리 1에 의해 $b<c$이거나 $b=c$이다.
이것은 조건에 모순된다.
$$\therefore \angle B>\angle C$$

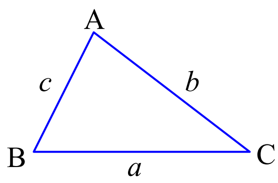


그림 4-2

마찬가지로 2) 도 증명된다.

3)은 2등변3각형의 성질에 의해서 나온다.

앞에서 1) ∠B>∠C⇒$b>c$

2) ∠B<∠C⇒$b<c$

3) ∠B=∠C⇒$b=c$

가 증명되였을 때(정리1) ∠B와 ∠C사이에 있을수 있는 경우는 >, <, = 뿐이고 $b>c$, $b<c$, $b=c$는 서로 다르다는것만 따지면 정리 1의 거꿀정리

1) $b>c$ ⇒∠B>∠C

2) $b<c$ ⇒∠B<∠C

3) $b=c$ ⇒∠B=∠C

가 성립한다는것이 나온다.(정리2의 증명과정)

이와 같이 하는 증명방법을 **전환법**이라고 부른다.

문 제

1. 선분 AB의 수직2등분선 L이 있다.
점M은 AB의 가운데점이고 N은
평면우의 임의의 점이다.(그림 4-3)
다음의 빈칸을 채워라.

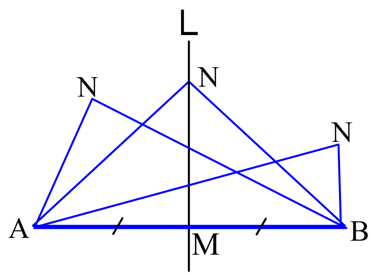


그림 4-3

	N∈L	N∈P_1	N∈P_2
NA, NB 의 크기관계		NA < NB	
∠A, ∠B의 크기관계	∠A=∠B		

1) NA=NB ⇒∠A=∠B
NA<NB ⇒∠A>∠B
NA > NB ⇒∠A<∠B인가?

2) ∠A=∠B ⇒NA=NB
∠A>∠B ⇒NA<NB
∠A<∠B⇒NA>NB인가?

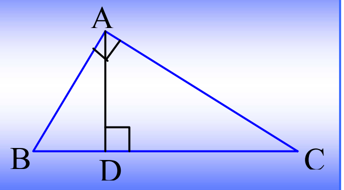
2. 2등변3각형의 밑변에 놓이는 한 점과 정각의 정점을 맺는 선분은 옆변보다 작다. 증명하여라.

3. △ABC에서 AB>AC일 때 BC의 임의의 점을 M이라고 하면 AB>AM이다. 증명하여라.

2. 직3각형에서의 비례선분

정리 3. 직3각형 ABC의 직각의 정점 A에서 빗변 BC에 그은 수직선의 밑점을 D라고 하면

1) $AD^2 = BD \cdot DC$
2) $AB^2 = BD \cdot BC$
3) $AC^2 = CD \cdot BC$



(증명) 1) △ABD와 △CAD에서

$$\angle BDA = \angle ADC = \angle R \qquad (1)$$

그리고 $\angle B = \angle R - \angle BAD$

$\angle DAC = \angle R - \angle BAD$

$\therefore \ \angle B = \angle DAC \qquad (2)$

(1), (2)로부터

$$\triangle ABD \backsim \triangle CAD$$

$$\therefore \ \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$$

즉 $AD^2 = BD \cdot DC$

마찬가지로 2), 3)도 증명된다.

세 선분 a, b, c에서 $a : b = b : c$ 즉 $b^2 = a\,c$일 때 b를 a와 c의 비례가운데마디라고 부른다.

상식

우리 선조들이 리용한 《황금비》

우리 선조들은 집을 짓거나 탑을 세울 때 비례관계를 잘 리용하였다. 고구려 동명왕릉의 정릉사의 금당은 너비와 길이의 비가 $1:\sqrt{2}$ 되게 지었고 중문은 1:2의 비로, 동금당과 서금당은 $1:\sqrt{3}$의 비로 지었다.

고구려의 왕궁이였던 안학궁의 남문은 《황금비》(중말비)인 약 5:8의 비로 지었다.

《황금비》는 AM:MB = MB:AB로 되는 비로서 《아름다운 비》라고 하여 건축물과 미술작품 등에 많이 리용되여왔다.

우리 나라 녀성들이 즐겨입는 조선치마저고리의 저고리와 치마에 의해 분할되는 키의 부분들은 대체로 《황금비》에 가깝다. 그러므로 녀성들이 치마저고리를 입으면 매우 아름답게 보이는것이다.

문 제

1. 그림 4-4를 보고 두 선분 a, b의 비례가운데마디 x를 구하는 방법을 말하여라.

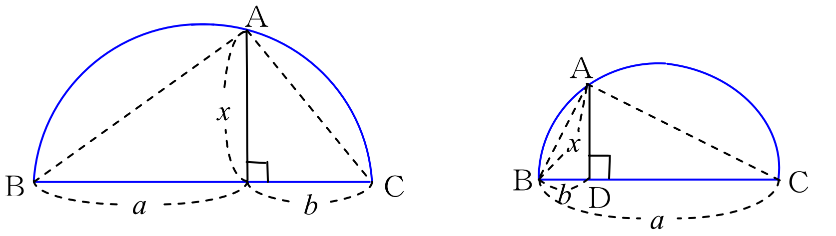


그림 4-4

2. 직3각형의 직각의 정점에서 그은 높이 h가 빗변을 5㎝, 7.2㎝인 두 선분으로 나누었다. 높이 h와 두 직각변을 구하여라.
3. 직3각형 ABC의 직각의 정점 A에서 그은 높이를 AH라고 하면

$$BH : CH = AB^2 : AC^2$$

이다. 증명하여라.

3. 피다고라스의 정리

정리 4. (피다고라스의 정리)
직 3 각형에서 두 직각변의 두제곱의 합은 빗변의 2 제곱과 같다. 즉

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(증명) 정점 A에서 BC에 수직선분 AD를 그으면 정리 3에 의하여

$$AB^2 = BD \cdot BC$$
$$AC^2 = DC \cdot BC$$
$$\therefore\ AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC =$$
$$= (BD + DC)BC = BC^2$$

즉 $a^2 = b^2 + c^2$

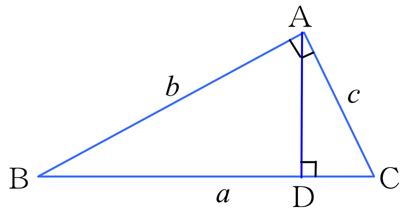


그림 4-5

례 1 한변이 2인 바른3각형의 높이를 구하여라.(그림 4-6)

(풀이) 구하려는 높이를 x라고 하면 피다고라스의 정리에 의하여

$$x^2 + 1^2 = 2^2$$
$$x^2 + 1 = 4$$
$$x^2 = 3\ (x > 0)$$
$$\therefore\ x = \sqrt{3}$$

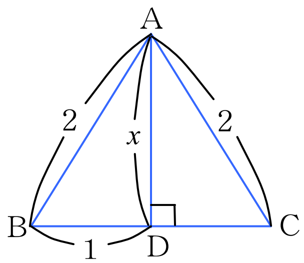


그림 4-6

례 2 한 직각변이 1인 직2등변3각형의 빗변을 구하여라.(그림 4—7)

(풀이) 직2등변3각형의 두 밑각은 45° 이다.
구하려는 빗변을 x라고 하면 피다고라스의 정리에 의하여

$$x^2=1^2+1^2$$

$$x^2=1+1=2\ (x>0)$$

$$\therefore\ x=\sqrt{2}$$

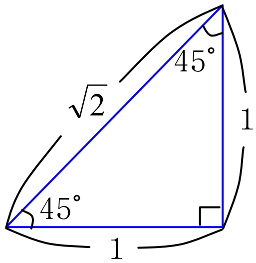


그림 4—7

례 1, 2로부터 다음과 같은 값을 얻을수 있다.

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \tan 45^\circ = 1$$

이것을 표로 묶으면 다음과 같다.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

문 제

1. 그림 4—8에서 선분 AB의 길이는

$$AB=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$$

이다. 왜 그런가?

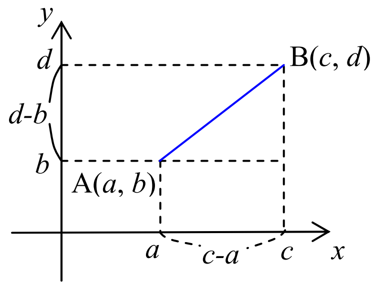


그림 4-8

2. 길이 60cm, 너비 40cm인 직4각형의 대각선의 길이를 구하여라.
3. 바른3각형 ABC의 변 BC를 빗변으로 하는 직3각형 BPC를 그리고 P에서 BC에 그은 수직선의 밑점을 M이라고 하면

$$AM^2+MP^2=BC^2$$

이다. 증명하여라.

4. 그림 4-9에서 OB=$\sqrt{2}$, OC=$\sqrt{3}$, OD=2, OE=$\sqrt{5}$, OF=$\sqrt{6}$ 이다. 왜 그런가?

5. 빗변이 1인 직3각형에서 한 뾰족각을 α 라고 하면 맞은변은 $\sin\alpha$ 이고 밑변은 $\cos\alpha$ 이다. 왜 그런가? (그림 4-10)

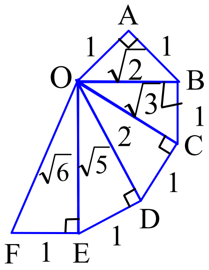


그림 4-9

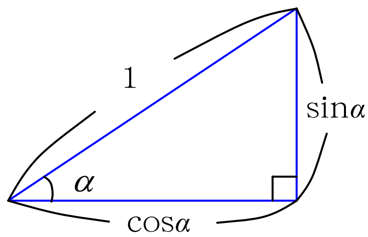


그림 4-10

이것을 써서 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$임을 증명하여라.

정리 5. △ABC에서 BC=a, AC=b, AB=c라고 하면

1) ∠A : 뾰족각 ⇒ $b^2+c^2>a^2$

2) ∠A : 무딘각 ⇒ $b^2+c^2<a^2$

(증명) 1) ∠A:뾰족각 ⇒$b^2+c^2>a^2$의 증명(그림 4-11)

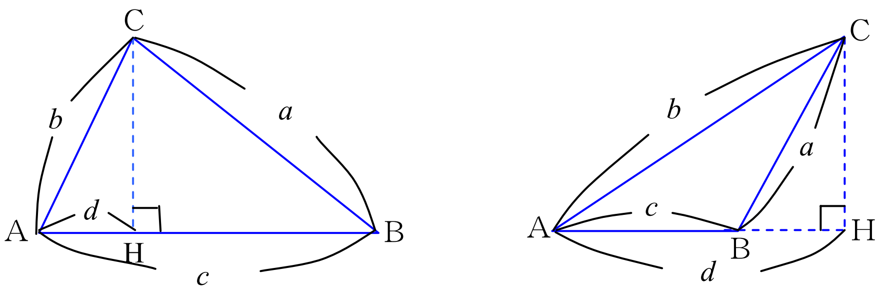


그림 4-11

정점 C에서 밑변 AB에 그은 수직선의 밑점을 H라고 하면

$$a^2=BH^2+CH^2=(c-d)^2+(b^2-d^2)$$

$$=c^2-2cd+d^2+b^2-d^2$$

$$=c^2+b^2-2cd<b^2+c^2$$

2) ∠A:무딘각⇒$b^2+c^2<a^2$의 증명 (그림 4-12)

정점 C에서 직선 AB에 그은 수직선의 밑점을 H라고 하면

$$a^2 = BH^2 + CH^2$$
$$= (c+d)^2 + (b^2 - d^2)$$
$$= c^2 + b^2 + 2cd > b^2 + c^2$$

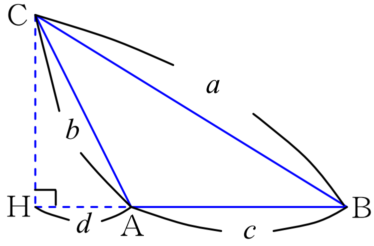


그림 4-12

정리 6. △ABC 에서 BC= a, AC= b, AB= c 라고 할 때

1) $b^2 + c^2 > a^2 \Rightarrow \angle A$: 뾰족각
2) $b^2 + c^2 < a^2 \Rightarrow \angle A$: 무딘각
3) $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow \angle A$: 직각

(증명) 정리 4, 5에 의하여

1) $\angle A$:뾰족각 $\Rightarrow b^2 + c^2 > a^2$

2) $\angle A$:무딘각 $\Rightarrow b^2 + c^2 < a^2$

3) $\angle A$:직각 $\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$

따라서 전환법에 의하여 거꿀정리인 정리 6이 성립한다.

문 제

1. 세 변의 길이가 다음과 같은 3각형은 어떤 3각형인가?(각에 따라 갈라놓아라.)
   1) 35m, 34m, 36m
   2) 17dm, 21dm, 13dm
   3) 39cm, 4cm, 40cm
2. 세 변의 길이가 다음과 같은 3각형이 직3각형임을 밝혀라.
   1) 3, 4, 5
   2) 15, 8, 17
   3) $4a^2-1$, $4a$, $4a^2+1$

련 습 문 제

1. 두 원둘레가 사귀면 중심사이의 거리는 반경의 합보다 작고 차보다 크다. 증명하여라.
2. 바른3각형의 두 변의 점을 맺는 선분은 한 변보다 크지 않다는 것을 증명하여라.(그림 4-13)

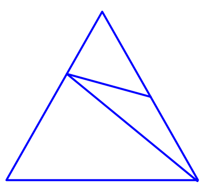


그림 4-13

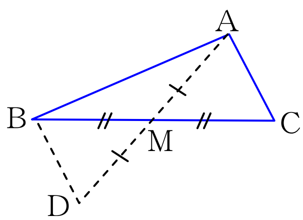


그림 4-14

3. △ABC의 가운데선을 AM이라고 하면 AB+AC>2AM 이라는것을 증명하여라. (그림 4-14)

4. 자름면이 반경 25cm인 원으로 된 강철봉이 있다. 이것을 깎아서 자름면이 직4각형모양으로 된 강철봉을 얻으려고 한다. 그 자름면의 한 변은 30cm이고 될수록 면적을 크게 할 때 다른 변을 구하여라.

5. 반경이 R인 원에 내접하는 바른4각형과 외접하는 바른4각형의 한변의 길이는 얼마인가?

6. 한변이 8cm인 바른3각형이 있다. 내접하는 원의 반경을 구하여라.

7. 주어진 두 바른4각형의 면적의 합 또는 차와 같은 면적을 가진 바른4각형을 그려라.

8. 자리표평면의 원점에서 다음 점까지의 거리를 구하여라.

1) A(3, 2) 2) B(3, -4) 3) C(-2, -3)

9. 다음 두 점사이의 거리를 구하여라.

1) 점 M(2, 3)과 자리표평면의 원점에 관한 그의 대칭점

2) 점 M(2, 3)과 중심닮음변환 (2, O)에 의한 그의 대응점

10. 3각뿔의 높이는 8cm이고 밑면의 세 변이 각각 3cm, 4cm, 5cm이다. 밑면의 면적과 그의 체적을 구하여라.(그림 4-15)

11. 반경이 4cm인 구의 중심에서 3cm의 거리에 있는 평면으로 잘랐을 때 생기는 자름면(원)의 반경을 구하여라.(그림 4-16)

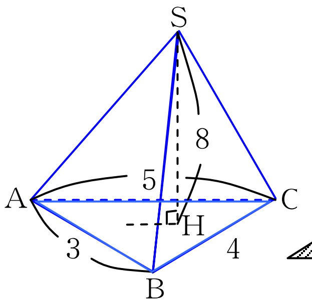


그림 4—15

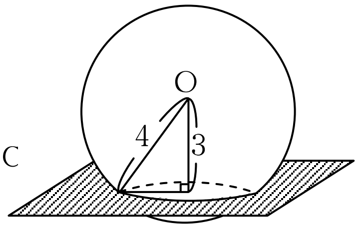


그림 4—16

12. △ABC는 ∠A=90° 인 직2등변3각형이고 점M은 변 AC의 가운데점이다. 점 C에서 직선 BM에 수직인 직선을 그어 그 사귐점을 D, 직선 CD와 변 BA의 연장선과의 사귐점을 E라고 할 때

1) △ABM≡△ACE임을 증명하여라.

2) 2EA:EC를 구하여라.(여기서 무리수는 그대로 두기로 한다.)

3) △ABM의 면적을 S라고 하고 △DCM의 면적을 T라고 할 때 S:T를 구하여라.

제 2 절. 3 각형의 아낙각과 바깥각

정리. △ABC 에서

1) ∠A 의 2 등분선 AM⇒다른 두 변의 비로 맞은변 BC 를 내분

2) ∠A 의 바깥각의 2 등분선 AN⇒다른 두 변의 비로 맞은변 BC 를 외분

조건. △ABC에서

1) AM : ∠A의 2등분선

2) AN : ∠A의 바깥각의 2등분선

결론. 1) $\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{MC}$

2) $\frac{AB}{AC}=\frac{BN}{NC}$

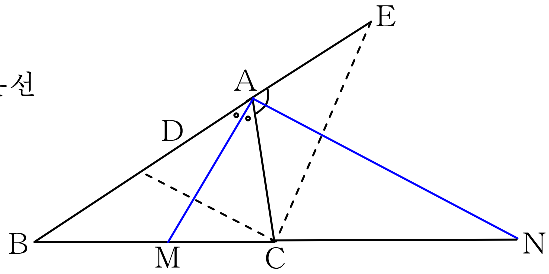


그림 4-17

(증명) 점 C를 지나 AN, AM에 각각 평행인 직선을 그어 직선 AB와 사귀는 점을 각각 D, E라고 하자.

1) AM//EC이므로

$$\frac{AB}{AE}=\frac{BM}{MC} \qquad (1)$$

또 ∠MAC=∠ACE

∠BAM=∠AEC

조건에 의하여

∠MAC=∠BAM이므로

∠ACE=∠AEC

$$\therefore\ AC=AE \qquad (2)$$

(1), (2)에 의하여

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{MC} \qquad (3)$$

즉 AM이 ∠A의 2등분선⇒$\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{MC}$

2) AN//CD이므로 $\frac{AB}{AD}=\frac{BN}{NC}$ (4)

또 ∠CAN=∠ACD

∠NAE=∠CDE

조건에 의하여 ∠CAN=∠NAE이므로

∠ACD=∠CDA

$$\therefore \ AD=AC \qquad (5)$$

(4), (5)에 의하여 $\frac{AB}{AC}=\frac{BN}{NC}$ (6)

즉 AN이 ∠A의 바깥각의 2등분선 $\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BN}{NC}$

문 제

1. △ABC에서 ∠B, ∠C의 2등분선의 사귐점을 I라고 하고 직선 AI가 BC와 사귀는 점을 P라고 하면
   AB:AI:AC=PB:PI:PC임을 증명하여라.
2. △ABC의 내심을 I라고 하고 AI의 연장선과 BC가 사귀는 점을 D라고 하면
   $$\frac{AI}{DI}=\frac{AB+AC}{BC}$$
   임을 증명하여라.
3. △ABC에서 ∠B, ∠C의 2등분선이 AC, AB와 사귀는 점을 각각 D, E 라고 할 때 BE=CD이면 △ABC는 2등변3각형임을 증명하여라.
4. ∠AOB(=120°)의 두 변 및 그의 2등분선 OF와 임의의 직선과의 사귐점을 각각 L, N 및 M이라고 하고
   OL=a, OM=f, ON=b
   라고 하면
   $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$
   임을 증명하여라. (그림 4-18)

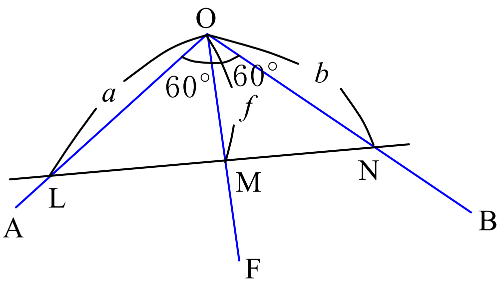


그림 4—18

련 습 문 제

1. △ABC의 ∠B의 2등분선을 BD라고 하자.
   1) AB=10cm, BC=15cm, AC=20cm일 때 AD와 DC의 길이를 구하여라.
   2) AD:DC=8:5, AB=16m일 때 BC의 길이를 구하여라.
2. 점 D는 △ABC의 변 BC의 점이다. 다음과 같은 경우에 AD는 ∠A의 2등분선으로 되는가?
   1) AB=12cm, AC=15cm, BD=4cm, DC=5cm
   2) AB=12cm, AC=56cm, BD:DC= 14:3
3. △ABC의 한 가운데선을 AD라고 하고 ∠ADB, ∠ADC의 2등분선이 그 맞은변과 사귀는 점을 각각 E, F라고 하면 EF//BC이다. 증명하여라.

4. △ABC에서 매 정각의 바깥각의 2등분선이 그 맞은변의 연장선과 사귀는 세 점은 한 직선에 놓인다는것을 증명하여라.

5. △ABC의 정각 A 및 그 바깥각의 2등분선이 직선 BC와 사귀는 점을 각각 P 및 Q 라고 할 때 Q가 BC의 C쪽으로의 연장선에 있으면 $\frac{2}{BC}=\frac{1}{BP}+\frac{1}{BQ}$ 임을 증명하여라.

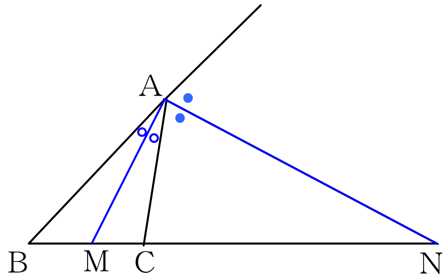


그림 4-19

6. △ABC에서
   1) AM이 BC를 다른 두 변의 비로 내분하면 AM은 ∠A의 아낙각의 2등분선이다.
   2) AN이 BC를 다른 두 변의 비로 외분하면 AN은 ∠A의 바깥각의 2등분선이다.

   를 증명하여라.(그림 4-19)

7. 선분 BC를 $m:n$으로 내분 및 외분하는 점을 각각 M, N이라고 하자. 평면에서 두 점 B, C까지의 거리의 비가 $m:n$인 점 A는 선분 MN을 직경으로 하는 원둘레에 있다. 왜 그런가? (그림 4-20)

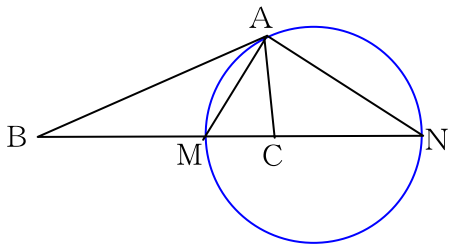


그림 4-20

제 3 절. 원에서의 크기관계

정리 1. (가름선에 관한 정리)

한 원에서 두 활줄이 사귀면 그 사귐점에서 나누인 매개 활줄의 두 부분의 적들은 서로 같다.

(증명) △ACM과 △MBD에서

∠CAM=∠MDB ($\overset{\frown}{CB}$에 대한 원둘레각)

∠ACM=∠MBD ($\overset{\frown}{AD}$에 대한 원둘레각)

∴ △ACM∽△MBD

따라서 $\frac{AM}{MD}=\frac{CM}{MB}$

∴ AM・MB=CM・MD

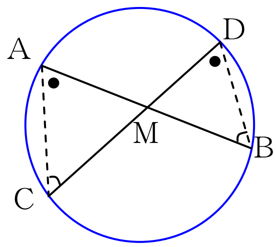


그림 4-21

문 제

1. 한 원의 두 활줄 AB와 CD가 점 M에서 사귀였다. AM=6cm, MB=3cm, MD=0.5cm일 때 MC의 길이를 구하여라.
2. 직경이 20m인 원둘레가 있다. 길이가 16m인 활줄에 수직인 직경의 두 부분의 길이를 구하여라.
3. 그림 4-22는 축받치개의 자름면을 나타내고 있다. 여기서 축의 직경 CE는 4.7cm, CD는 2cm이다. AB의 길이를 구하여라.

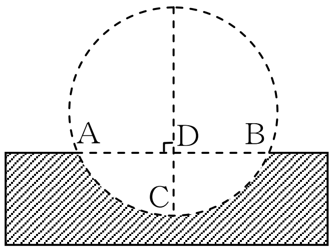


그림 4-22

정리 2. (거꿀정리) 점 M에서 사귀는 두 선분 AB와 CD가 있다. AM・MB=CM・MD이면 네 점 A, B, C, D는 한 원둘레에 있다.

(증명) 조건에 의하여

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD$$

$$\therefore \frac{AM}{MD} = \frac{CM}{MB}$$

그런데 ∠AMC=∠BMD (맞문각)

$$\therefore \triangle ACM \backsim \triangle MBD$$

$$\therefore \angle CAB = \angle CDB$$

따라서 네 점 A, B, C, D는 한 원둘레에 놓인다.

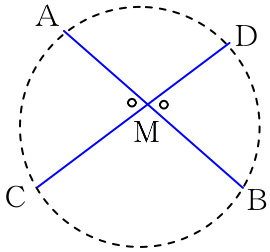


그림 4-23

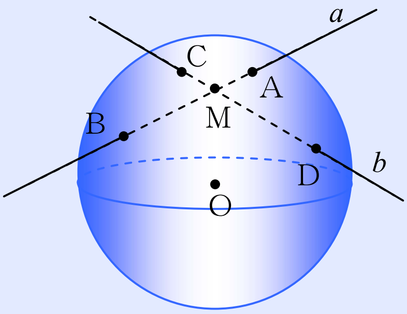
탐 구

구 아낙의 어떤 점 M을 지나는 두 직선 a, b가 구면과 사귀는 점을 A, B ; C, D라고 하자.

1) 이때 AM・MB와 CM・MD를 비교하여라.

2) 점 M을 지나는 다른 직선 C가 구면과 사귀는 점을 E, F라고 할 때 ME・MF와의 관계는 어떤가?

3) 어떤 결과를 얻을수 있는가?



문 제

1. 그림 4-24에서 네 점 A, B, C, D가 한 원둘레에 있는가를 밝혀라.

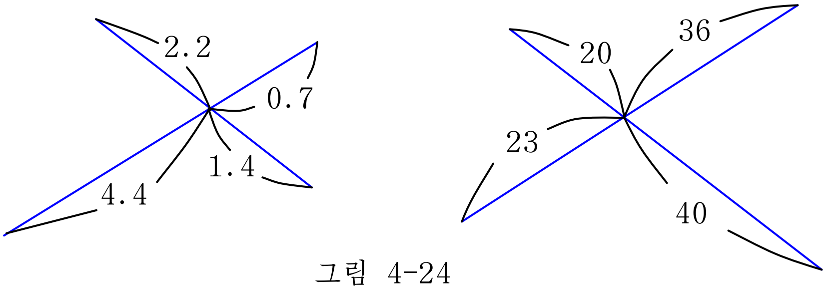


그림 4-24

2. 정리 2를 귀유법으로 증명하여라.
3. 지금까지 학습한 네 점이 한 원둘레에 놓일 조건들을 묶어보아라.

정리 3. (가름선과 접선에 관한 정리)
원밖의 한 점에서 가름선을 그으면 그 점으로부터 가름선과 원둘레와의 사귐점까지 이르는 두 선분의 적은 그 점에서 그은 접선의 2제곱과 같다.

(증명) 선분 AC, BC를 긋자.

△MAC와 △MBC에서

∠M:공통각, ∠MCA=∠MBC

∴ △MAC∽△MBC

따라서 $\frac{MA}{MC}=\frac{MC}{MB}$

즉 $MA\cdot MB=MC^2$

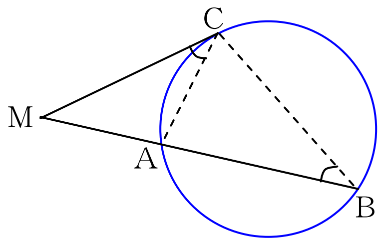
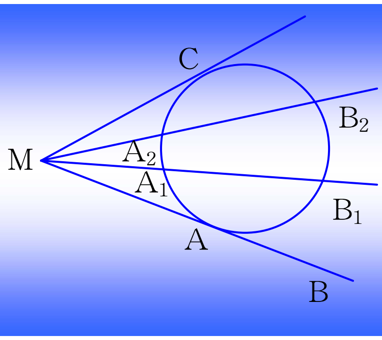


그림 4-25

계. 원밖의 한 점에서 가름선들을 그으면 그 점으로부터 매개 가름선이 원둘레와 사귀는 두 점까지 이르는 두 선분의 적들은 같다. 즉

$$MA\cdot MB=MA_1\cdot MB_1=$$
$$=MA_2\cdot MB_2=\cdots$$

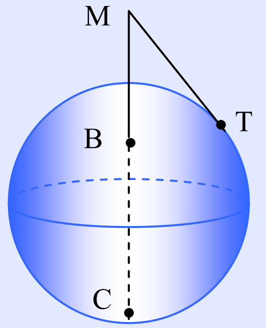


탐 구

구밖의 한 점 M에서 접선 MT를 긋고 구와 사귀는 직선 MC를 그어 구면과 B, C에서 사귄다고 하자. 이때 사귀는 직선 MC를 아무렇게나 그어도

$$MT^2=MB\cdot MC$$

인가?



문 제

1. 그림 4—26에서 점 M에서 바라볼수 있는 가장 먼거리 MT를 구하여라. 높이는 h이다. 지구의 반경을 R라고 하고 계산하여라.

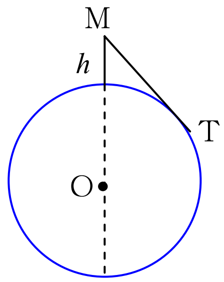


그림 4—26

2. 두 원둘레가 사귈 때 공통활줄의 연장선의 한 점에서 두 원에 접선을 그으면 그 점에서 접점까지의 거리들은 서로 같다. 증명하여라. (그림 4—27)

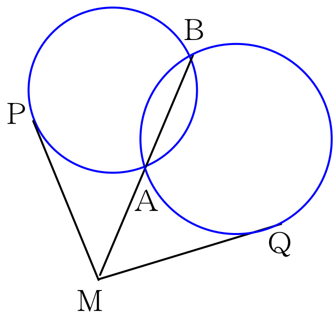


그림 4—27

3. 한 점으로부터 원에 가름선과 접선을 그었다. 가름선에서 원밖에 있는 부분과 원안에 있는 부분의 비가 5:4이고 차는 3cm이다. 접선의 길이를 구하여라.
4. 사귀는 두 원의 공통활줄 PQ의 연장선에 한 점 A를 정하고 그 점으로부터 한 원에는 접하고 다른 원과는 사귀는 직선 ABCD를 긋고 원의 접점을 C, 사귐점을 B, D라고 하면

$$AB:BC=AC:CD$$

임을 증명하여라.

정리 4. (거꿀정리)

원 O의 가름선에서 점 M을 원밖에 잡고 원둘레에 점 C를 잡았을 때 $MA\cdot MB=MC^2$이면 MC는 원 O의 접선이다.

(증명) 조건에 의하여

$$MA \cdot MB = MC^2$$

$$\therefore \frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB}$$

∠M:△MAC와 △MBC의 공통각

따라서 △MAC∽△MBC

$$\therefore \angle MCA = \angle MBC$$

따라서 MC는 세 점 A, B, C를 지나는 원둘레에 접한다.

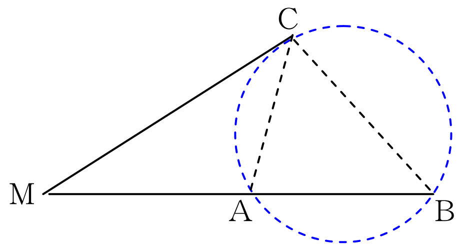


그림 4-28

탐 구

제형의 성질과 원의 내접 4 각형의 성질을 다 찾고 비교하여보아라.

문 제

1. 그림 4—29에서 다음과 같은 경우에 MC가 △ABC의 외접원에 접하겠는가를 밝혀라.
   1) MC=6.4, MA=3.2, AB=9.6
   2) BM=10, AM=4.1, MC=8

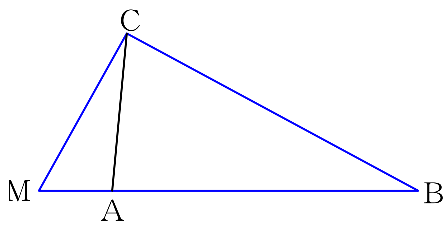


그림 4-29

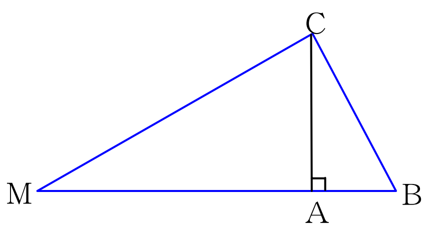


그림 4-30

2. 그림 4—30에서 CA⊥MB이고 AB=3, AC=4, $MB=\frac{25}{3}$ 이다. BC가 △ACM의 외접원에 접하겠는가?

련 습 문 제

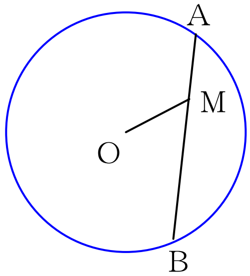


그림 4-31

1. 그림 4-31에서 원 O의 반경은 5cm이고 OM=3cm 이다. AM·BM은 얼마인가?
2. 원둘레의 점으로부터 한 직경에 내린 수직선에 의하여

그 직경이 4.8cm와 2.7cm의 두 부분으로 나누어졌다. 그 수직선의 길이를 구하여라.

3. 직경 CD에 수직인 활줄 AB가 CD와 점 E에서 사귀였다. AB=6cm, CE=1.5cm이면 직경의 길이는 얼마인가?

4. 너비가 1.435m인 철길이 AB에서 구부러지면서 갈라져나가고있다. BC=42.4m일 때 활등 $\overset{\frown}{AC}$의 반경을 구하여라.(그림 4-32)

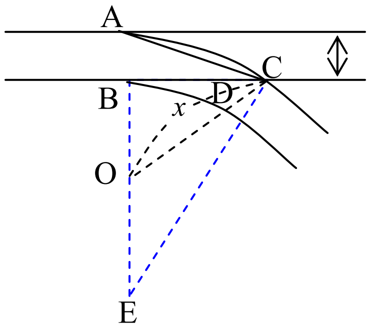


그림 4-32

5. 철길이 도는데를 원둘레모양으로 하려 하는데 이때 그 반경을 145m보다 작지 않게 하려고 한다. 다음과 같이 할수 있는가?

   1) 철길의 두 점을 맺는 활줄의 길이가 100m, 이 활줄에 의하여 생기는 활형의 높이가 10m

   2) 활줄의 길이가 50m, 활형의 높이가 2m

6. △ABC안에 점 P를 정하고 △ABP, △ACP의 외접원을 그릴 때 이 두 원둘레가 변 BC와 각각 D, E에서 사귀고 PD=PE이면 BE:CD=AB:AC임을 증명하여라.

7. 원 O의 활등 $\overset{\frown}{AB}$(작은쪽 활등)의 점 P로부터 그은 두 활줄 PE , PF가 활줄 AB와 사귀는 점을 각각 C, D라고 하자. 만일 AC=DB , PC=DF이면 PE=PF임을 증명하여라.

8. AB를 직경으로 하는 원둘레 O에 있는 한 점 P로부터 AB에 수직인 활줄 PQ를 긋고 AB와의 사귐점을 C라고 하자.
   P를 중심으로 하고 PC를 반경으로 하는 원을 그리고 처음 원둘레와의 사귐점을 R, S라고 하면 활줄 RS는 PC를 2등분한다는것을 증명하여라.

제 4 절. 자리길 증명

다음의 자리길은 흔히 리용되는 자리길(기본자리길)이다.

1) 한 점 O로부터 r만 한 거리에 있는 점의 자리길은 원둘레 O(r)이다.

2) 일정한 선분 a를 각 α로 보는 점의 자리길은 a를 활줄로 하고 각 α를 품는 활형의 활등이다. (끝점 제외)

3) 일정한 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자리길은 그 두 점을 맺는 선분의 수직 2등분선이다.

4) 각의 두 변으로부터 같은 거리에 있는 점의 자리길은 그 각의 2등분선이다.

5) 직선 ℓ로부터 a(일정)만 한 거리에 있는 점의 자리길은 직선 ℓ로부터 a만 한 거리에 있으며 그에 평행인 두 직선이다.

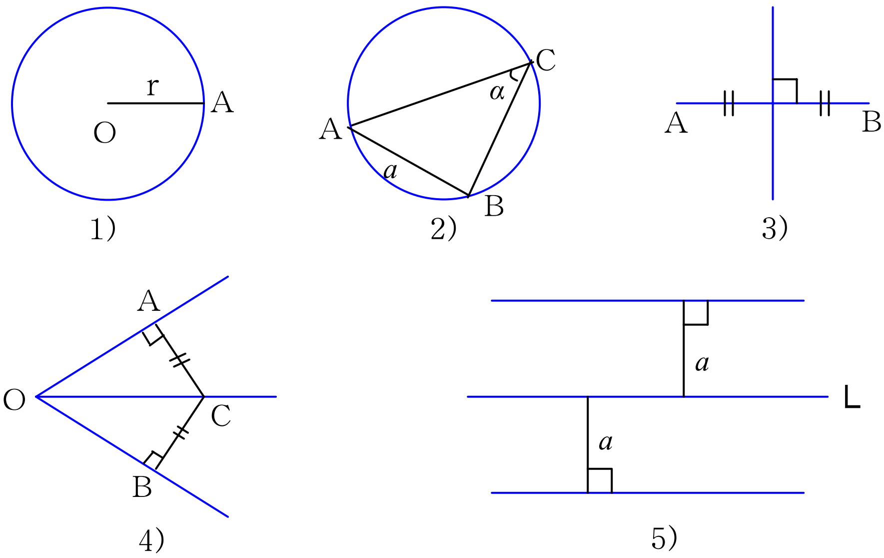


그림 4-33

한 점 O로부터 3만 한 거리에 있는 점은 원둘레 O(3)에 놓인다. 원둘레 O(3)가 점 O로부터 3만 한 거리에 있는 점의 자리길이라는것을 증명하려면 O에서 3만 한 거리에 있는 점은 O(3)에 놓인다는것과 거꾸로 O(3)에 있는 임의의 점을 A라고 하면 OA=3이라는것을 밝혀야 한다.

자리길증명

도형 F가 조건 q를 만족시키는 점의 자리길이라는것을 증명하기 위해서는 다음과 같은 두가지를 밝혀야 한다.

1) 조건 q를 만족시키는 점은 도형 F에 있다.

2) 도형 F에 있는 점은 조건 q를 만족시킨다.

례 1 점 A와 이 점을 지나지 않는 직선 L의 점 Q를 맺는 선분 A Q를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 자리길은 L에 평행인 직선이다.

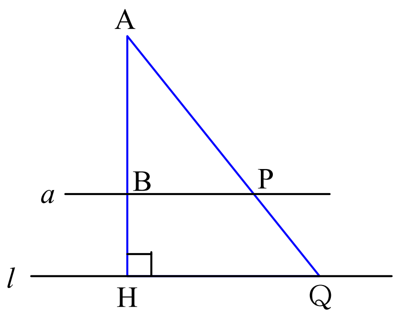


그림 4-34

(증명) 1) 점 A에서 직선 L에 그은 수직선의 밑점을 H라고 하면 선분 AH를 $m:n$으로 내분하는 점 B는 일정한 점이며조건에 맞는다.

조건을 만족시키는 다른 임의의 점을 P라고 하면

$$\frac{AP}{PQ}=\frac{m}{n}$$

이므로

$$\frac{AB}{BH}=\frac{AP}{PQ}=\frac{m}{n}$$

그러므로 BP // HQ

즉 점 P는 일정한 점 B를 지나며 L에 평행인 직선 a에 있다.

2) 거꾸로 직선 a의 임의의 점을 P라고 하자.

AP의 연장선이 직선 L과 사귀는 점을 Q라고 하면 L ∥ a이므로

$$\frac{AP}{PQ}=\frac{AB}{BH}=\frac{m}{n}$$

즉 P는 조건을 만족시킨다.

문 제

증명하여라. (1—3)

1. 점 A와 이 점을 지나지 않는 직선 L의 점 Q를 맺는 선분 AQ를 $m:n$의 비로 외분하는 점의 자리길은 L에 평행인 직선이다.
2. 평행인 두 직선 a, b에 이르는 거리가 같은 점의 자리길은 a, b에 수직인 선분 AB(A∈a, B∈b)의 가운데점을 지나며 a에 평행인 직선이다.
3. 원둘레 O(r)의 밖에 있는 점 P에서 그에 그은 두 접선의 접점을 A, B라고 할 때 △PAB가 바른3각형으로 되는 P의 자리길은 원둘레 O(2r)이다.

자리길문제에서는 증명할것을 요구하는 문제와 자리길을 찾아낼것을 요구하는 문제가 있다. 자리길을 찾아낼것을 요구하는 문제를 풀 때에는 먼저 조건에 맞는 점 P가 어떤 도형 F에 있다는것을 밝히고 다음에 F에 있는 임의의 점이 조건을 만족한다는것을 밝힌다.

례 2 일정한 선분 BC를 변으로 하는 등변4각형의 대각선의 사귐점의 자리길을 구하여라.

(풀이) 조건을 만족시키는 점을 P(등변4각형 ABCD의 대각선의 사귐점)라고 하자.

그러면 ∠BPC=∠R(일정)

따라서 점 P는 일정한 선분 BC를 직경으로 하는 원둘레에 있다.

거꾸로 그 원둘레의 임의의 점을 P라고 하자. (B, C는 제외)

점 P에 관한 점 B, C의 대칭점을 각각 D, A라고 하면

BP=PD, CP=PA, AC⊥BD

그러므로 △PBC≡△PCD≡△PDA≡△PAB(변각변)

따라서 BC=CD=DA=AB

ABCD는 등변4각형

점 B, C는 조건을 만족시키지 않는다. 이리하여 구하려는 점의 자리길은 BC를 직경으로 하는 원둘레(점 B, C는 제외)이다.

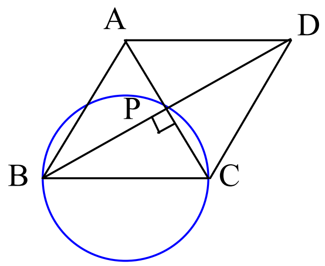


그림 4-35

문 제

1. 주어진 활형 AQB의 활등 $\overset{\frown}{AB}$에서 움직이는 점 Q가 있다. AQ의 연장선에 QB=QP되게 잡은 점 P의 자리길을 구하여라.
2. 원 O(r)밖에 있는 점 A에서 가름선 AMN(M, N은 원둘레의 점)을 그을 때 활줄 MN의 가운데점 P의 자리길을 구하여라.
3. 선분 AB를 밑변으로 하는 면적이 S인 △PAB의 정점 P의 자리길을 구하여라.
4. 서로 사귀는 두 직선에 접하는 원의 중심의 자리길을 구하여라.
5. ∠XOY=α (α<∠R)의 아낙에 있는 점 P로부터 각의 두 변 OX, OY에 내린 수직선의 밑점을 각각 Q, R라고 할 때 PQ+PR=L(일정)인 점 P의 자리길을 구하여라.

련 습 문 제

1. 원둘레 O(r)의 점 A에서 이 원과 접하는 원의 중심의 자리길을 구하여라.
2. 일정한 선분 AB의 끝점 A, B가 서로 수직인 두 직선 **XX′, YY′**에서 움직일 때 선분 AB의 가운데점의 자리길을 구하여라.
3. 일정한 직선 a와 그 밖의 점 A가 있다. 직선 a의 임의의 점 Q와 A를 두 정점으로 하는 바른 3각형의 정점 P의 자리길을 구하여라.
4. 주어진 선분 AB에 한 점 C를 정하고 AC, BC를 각각 한 변으로 하는 바른 3각형 ACD와 BCE를 AB에 관하여 같은쪽에 그릴 때 선분 DE의 가운데점의 자리길을 구하여라.
5. 각 ∠XOY의 변 OX, OY에 각각 선분 AB, CD가 있다. 각의 아낙에 있으면서 면적 S(△ABP)=S(△CDP)를 만족하는 점 P의 자리길을 구하여라.
6. 원둘레의 일정한 점 A와 그 원둘레에서 움직이는 점 B가 있다. 선분 AB 또는 그의 연장선에 있으면서 AP·AB=K^2(일정)을 만족하는 점 P의 자리길을 구하여라.
7. 주어진 두 점으로부터의 거리의 2제곱의 합이 일정한 점의 자리길을 구하여라.
8. 점 A와 일정한 원 O(r)가 있다. 점 A와 그 원둘레의 점 P를 맺는 선분 AP를 m:n으로 내분하는 점의 자리길을 구하여라.

9. 직선 XY와 이 직선밖의 점 A가 있다. 점 A와 XY의 점 B를 맺는 선분 AB에 있으면서 AP・AB=K^2(일정) 을 만족하는 점 P의 자리길을 구하여라.

복 습 문 제

1. 3각형의 제일 큰 변에 붙어있는 두 아낙각은 반드시 뾰족각이다. 증명하여라.
2. 반경이 5cm인 원이 있다. 이 원의 직경 AB를 2:3의 비로 나누는 점 N에서 이 직경에 수직인 활줄 CD를 그었다. CD의 길이를 구하여라.
3. 직3각형의 직각의 정점에서 빗변에 그은 높이가 빗변을 3:7의 비로 나눈다.
   그 높이가 50㎝라고 할 때 그 직각변의 길이를 구하여라.
4. 직3각형의 세 변이 다음과 같을 때 x의 값을 구하여라. 있을수 있는 경우를 다 생각하여라.
   1) 4, 7, $6-x$ 2) 6, 11, $x+5$
   3) 5, 11, $3x+4$ 4) 3, 10, $6-5x$
5. 부채형의 반경을 R, 그 활줄을 $2a$, 내접원의 반경을 r라고 하면

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{R}$$

   이다. 증명하여라.
6. 흔들이의 끈의 길이가 MA=L=1m이다. 추가 올라간 높이 CA=h=10㎝일 때 추 B로부터 MA까지의 거리 BC를 구하여라.(그림 4—36)

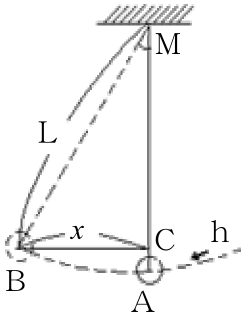


그림 4-36

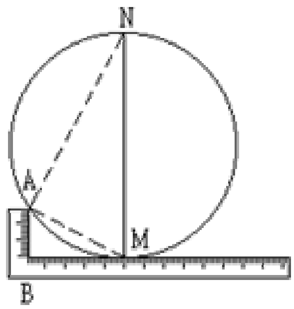


그림 4-37

7. 그림 4-37은 ㄱ자로 원의 직경을 재는 방법을 보여주고있다. AB=a, MB=b라고 할 때 원의 직경을 a, b에 의하여 표시하여라.
8. 그림 4-38에서와 같이 나들개가 있다. 휘돌이에서 OB가 축 O의 주위로 돌면 A는 직선 g를 따라 왔다갔다 한다. A가 왔다갔다하는 거리를 r, L, h를 가지고 표시하여라.

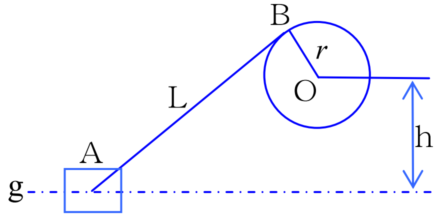


그림 4-38

9. 중심이 O인 원의 활줄 AB를 량쪽으로 연장하고 그우에서 AC=BD가 되게 C, D를 잡고 점 C, D로부터 접선 CE, DF를 CD의 반대쪽에 그으면 E, F를 맺는 활줄은 AB를 2등분한다는것을 증명하여라.

10. 원 O밖의 점 P로부터 접선 PA, PB를 긋고 활줄 AB의 가운데점 M을 지나는 임의의 활줄 CD를 그으면

 1) 네 점 P, C, O, D는 한 원둘레에 놓인다. 증명하여라.(네 점 P, C, O, D가 한 원둘레에 놓이지 않는 경우가 있을수 있는가?)

 2) ∠CPM=∠MPD이다. 증명하여라.

11. △ABC의 무게중심을 G라고 하고 ∠BAG=90°, AB=5㎝, AG=3㎝라고 할 때 가운데선의 길이를 구하여라.

12. 원 O(3㎝)를 그리고 한 점 H에서 서로 사귀는 두 활줄 AB와 CD를 그어라. AB와 CD의 가운데점을 각각 I, J라고 할 때

 1) 네 점 O, I, J, H는 한 원둘레에 놓이는가?

 2) AB=5㎝, AH=($3-\sqrt{2}$)㎝일 때 원둘레 OIJ의 반경을 구하여라.

13. 바른3각형 ABC아낙에 있는 점 P에 대하여 $PA^2=PB^2+PC^2$이 만족될 때 ∠BPC의 크기를 구하여라.

14. 직2등변3각형 ABC의 빗변 BC의 임의의 점을 D라고 하면

$$2AD^2=BD^2+CD^2$$

이다. 증명하여라.

15. 직3각형 ABC의 빗변 BC의 가운데점 M으로부터 두 직각변 AB, AC에 선분 MP, MQ를 긋고 ∠PMQ가 직각이 되도록 하면 $BP^2+CQ^2=PQ^2$이다. 증명하여라.

16. 직3각형 ABC의 직각의 정점 A로부터 빗변 BC에 수직인 직선 AD를 그으면

$$AB+AC<AD+BC$$

이다. 증명하여라.

17. △ABC에서 ∠A=90°, A에서 BC에 그은 수직선의 밑점을 D, P는 AD의 가운데점, BP와 AC의 사귐점을 E, E에서 BC에 그은 수직선의 밑점을 F, AE=3, EC=12일 때 EF의 길이는 얼마인가?

18. 반경이 다른 두 원 O_1과 O_2는 점 C와 E에서 사귀고 CB는 원 O_1의 직경이다. B를 지나서 원 O_1의 접선은 CE의 늘임선과 A에서 사귀고 AFD는 가름선으로서 원 O_2와 F, D에서 사귄다. BC=FD=2, CE=$\sqrt{3}$일 때 AF의 길이는 (　)이다.

 1) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$　　2) $\frac{\sqrt{21}+1}{3}$　　3) $\frac{\sqrt{21}+3}{3}$　　4) $\frac{\sqrt{21}-3}{3}$

19. 1) 두 점 D, I와 한 직선 L이 주어졌다. 직4각형 ABCD를 그리되 두 대각선은 점 I에서 사귀고 정점 C는 직선 L에 놓이게 하여라.

 2) 두 점 A, E와 원 O 및 직선 L이 주어졌다. 평행4변형 ABCD를 그리되 대각선의 사귐점이 점 E로 되고 정점 D는 원둘레 O에 놓이고 정점 B는 직선 L에 놓이게 하여라.

20. 직3각형 KBC(∠K=90°)의 변 BC, CK, BK의 가운데점을 각각 I, L, M이라고 하고 점 K에 관한 점 L, M의 대칭점을 각각 E, F, 점 I에 관한 점 K의 대칭점을 T라고 하고 반직선 IT에 ID=3IT로 되게 점 D를 찍는다. 그리고 직선 BE와 CF의 사귐점을 A라고 한다.

1) 4각형 EFLM은 무슨 4각형인가?

2) 선분 EF와 BC를 비교하여라. 점 E와 F는 각각 선분 AB와 AC의 무슨 점으로 되는가?

3) 4각형 KBTC와 CABD는 무슨 4각형인가?

21. 2등변3각형 ABC(AB=AC)가 있다. 이 평면에서 ∠APB=∠APC인 점 P의 자리길을 구하여라.

22. 바른3각형 ABC의 변 AC, AB에 각각 점 Q, R를 잡되 BQ= CR되게 한다. BQ, CR와 사귐점 P의 자리길을 구하여라.

상 식

유클리드 《기하학원본》

유클리드(B.C 340-B. C 287)는 기하학건설에서 큰 공적을 남긴 고대그리스의 수학자이다. 그의 공적은 당대까지 인류가 창조한 기하유산을 하나의 방대한 리론체계로 집대성한 기하대전서-《기하학원본》을 내놓았다는데 있다.

유클리드가 쓴 《기하학원본》은 모두 13권으로 되여있는데 거기에는 우리가 중학교에서 학습하게 되는 모든 내용들이 들어있다. 1권부터 6권에는 3각형의 합동조건, 변과 각사이의 관계, 평행선에 관한 리론, 3각형과 다각형의 면적에 관한 리론, 원에 관한 리론, 내접, 외접에 관한 리론, 닮음에 관한 리론이 서술되여있고 7권부터 10권에는 비례리론과 산수리론이 서술되여있으며 11권부터 13권에는 평면도형과 공간도형에 대한 내용이 서술되여있다.

제5장. 지수식과 로그식

a^x

지수식
로그식

$\log_a m$

제 1 절. 지수식

찾기 다음 식에서 지수에 변수가 들어있는 식을 찾아보아라.

1) 2^3, 3^x, 4^{x-1}, 7^8

2) $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+2}$, 3^x, 3^x+3, $7^x+\sqrt{x}$

지수에 변수가 들어있는 식을 지수식이라고 부른다.

실례로 3^x+2^{x-2}, $3^{2x}+5^x-9$ 등은 지수식이고 $2+\sqrt{x}$, 3^2+x^2-7 은 지수식이 아니다.

지수식에서도 한또래마디를 생각할수 있다.

례 1 다음 지수식을 정돈하여라.

$$2^{3+x}+3\cdot 2^x+7$$

(풀이) $2^{3+x}+3\cdot 2^x+7=2^3 2^x+3\cdot 2^x+7=8\cdot 2^x+3\cdot 2^x+7=11\cdot 2^x+7$

문 제

1. 다음 지수식을 정돈하여라.

1) $2^{x+2}+2^x-10$ 2) $3^{x-3}+3^{x-2}+2^x+2^{x+9}$

2. 다음 지수식을 정돈하여라.

1) $6\cdot 3^{x+2}-5^{x+2}+3^{x+4}-5^{x+2}$ 2) $2\cdot 3^{-x}+3^{2-x}+5^{2x+2}-7\cdot 5^{2x-2}$

지수식에서 a^x의 성질을 아는것이 중요하다.

지수식 a^x은 $a>0$, $a\neq 1$일 때만 생각한다.

알아보기 지수식 2^x에서 $x=-3,\ -2,\ 2,\ 3$일 때 식의 값을 구하여라.

식의 값이 령, 부수가 되는 x가 있는가?

지수식 a^x은 임의의 x에 대해서도 그 값이 늘 정수이다. 즉

$$a^x>0$$

해보기 지수식 3^x에서 x가 정수, 부수일 때와 $x=0(3^0=1)$일 때를 비교해보아라.

> $a>1$일 때 a^x의 값은 $x<0$이면 1보다 작고 $x>0$이면 1보다 크다.

> $a>1$일 때 $x_1>x_2$이면 $a^{x_1}>a^{x_2}$이다.

(증명) 함수 $y=x^\alpha$ $(\alpha>0)$은 $(0,\ +\infty)$에서 증가함수이므로

$m>n>0$이므로 $m^\alpha>n^\alpha$

$\therefore$ $x>1$이면 $x^\alpha>1^\alpha=1$

$a>1$이므로 $a^\alpha>1$

$x_1>x_2$이면 $x_1-x_2>0$이므로 $a^{x_1-x_2}>1$

안갈기식의 량변에 a^{x_2}을 곱하면 $a^{x_1}>a^{x_2}$

$\therefore$ $x_1>x_2$, $a>1$이면 $a^{x_1}>a^{x_2}$

> $0<a<1$일 때 $x_1>x_2$이면 $a^{x_1}<a^{x_2}$이다.

(증명) 함수 $y=x^\alpha$ $(\alpha>0)$은 $(0,\ +\infty)$에서 증가함수

$\therefore$ $0<a<1$이면 $0<a^\alpha<1$

$x_1-x_2>0$ 이므로 $0<a^{x_1-x_2}<1$

a^{x_2} $(a^{x_2}>0)$을 량변에 곱하면

$0<a^{x_1}<a^{x_2}$

$\therefore$ $0<a<1$, $x_1>x_2$ $\Rightarrow$ $a^{x_1}<a^{x_2}$

례 2 다음 수들을 작은것부터 커가는 차례로 써라.

$$2^{2.3},\ 2^{-0.7},\ 2^{-1.9},\ 2^{1.5},\ 2^{2.6},\ 2^0$$

(풀이) 주어진 제곱들의 지수들만 비교해보면

$$-1.9<-0.7<0<1.5<2.3<2.6$$

$2>1$이므로 지수들의 크기순서는 곧 주어진 수들의 크기순서로 된다.

따라서 $2^{-1.9}<2^{-0.7}<2^0<2^{1.5}<2^{2.3}<2^{2.6}$

문 제

1. $0<a<1$일 때 다음것을 증명하여라.

 1) $x>0$이면 $0<a^x<1$ 　　 2) $x<0$이면 $a^x>1$

2. 다음 수들가운데서 1보다 큰것과 작은것을 골라내여라.

$$3^{-2.3},\ 0.4^{-0.6},\ \left(\frac{2}{3}\right)^{1.7},\ 2^{0.03},\ 2^0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-3.1}$$

3. 다음 수들가운데서 어느것이 큰가?

 1) $5^{0.3}$과 $5^{0.4}$ 　　 2) $0.7^{\sqrt{2}}$과 $0.7^{\sqrt{3}}$

 3) $\left(\sqrt{3}\right)^{0.75}$과 $\left(\sqrt{3}\right)^{0.8}$ 　　 4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1.8}$과 $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1.9}$

4. 다음 수들을 크기순서로 써라.

 1) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\ \left(\frac{9}{4}\right)^{0.4},\ \left(\frac{4}{9}\right)^{-0.2},\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-0.015}$ 　　 2) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}},\ \left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}},\ \left(\frac{7}{4}\right)^{4.1}$

련 습 문 제

1. 다음 식들가운데서 지수식을 골라내여라.

$$x^5,\quad 6^x,\quad 1.5^x,\quad x^{\frac{2}{3}},\quad x^{-1.2},\quad \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

2. $-1<a<0$, b가 1보다 큰 홀수이면 b^a, a^b, $a^{\frac{1}{b}}$의 크기관계는 (　)이다.

 1) $b^a>a^b>a^{\frac{1}{b}}$ 　 2) $a^b>b^a>a^{\frac{1}{b}}$ 　 3) $b^a>a^{\frac{1}{b}}>a^b$ 　 4) $a^b>a^{\frac{1}{b}}>b^a$

3. $0<a<b<1$일 때 다음 안갈기식가운데서 옳은것을 찾아보아라.

 1) $(1-a)^{\frac{1}{b}}>(1-a)^b$ 　　 2) $(1+a)^a>(1+b)^b$

 3) $(1-a)^b>(1-a)^{\frac{b}{2}}$ 　　 4) $(1-a)^a>(1-b)^b$

4. $0<a<b<1$일 때 a^b, b^a의 크기를 비교하여라.

5. $m>n>0$, $a\neq1$, $a>0$일 때

$a^m+a^{-m}>a^n+a^{-n}$임을 증명하여라.

6. $2^x+5^y=8$일 때 $k=2^{x+1}+5^{y+1}$이 취할수 있는 값의 범위를 구하여라.

제 2 절. 로그식

1. 로그와 로그식

$2^3=8$에서 3은 밑수 2의 지수이다.
이때 지수 3을 2를 밑수로 하는 8의 로그수라고 부르고 $3=\log_2 8$로 표시한다.

례 1 $2^2=4$, $2^4=16$에서 지수 2, 4를 각각 2를 밑수로 하는 4, 16의 로그수로 표시하여라.

(풀이) $2=\log_2 4$, $4=\log_2 16$

$a>0$, $a\neq 1$일 때 $a^x=m$을 만족시키는 변수 x의 값을 a를 밑수로 하는 m의 로그수 또는 로그라고 부르고

$$\log_a m$$

으로 표시한다. 이것을 《로그 a, m》이라고 읽는다.
$\log_a m=b$일 때 b를 $\log_a m$의 값이라고도 부른다.

$\log_a m$ (m → 진수, a → 로그의 밑수)

례 2 다음 로그의 값을 구하여라.

1) $\log_3 27$　　　2) $\log_5 125$

(풀이) 1) $3^x=27$에서 $x=3$이므로

$$\log_3 27=3$$

2) $5^x=125$에서 $x=3$이므로

$$\log_5 125=3$$

례 3 다음 로그의 값을 구하여라.

1) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}$　　　2) $\log_{\frac{1}{2}}16$

(풀이) 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{16}$에서 $x=4$이므로 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}=4$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=16$에서 $x=-4$이므로 $\log_{\frac{1}{2}}16=-4$

문 제

1. 다음 로그의 값을 구하여라.

1) $\log_2 \frac{1}{4}$ 2) $\log_{10} 1\,000$ 3) $\log_3 0.(3)$ 4) $\log_{10} 0.001$

2. 다음 로그의 값을 구하여라.

1) $\log_9 3$ 2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$ 3) $\log_{\frac{1}{2}} 32$ 4) $\log_{0.01} 1\,000\,000$

> 수 10을 밑수로 하는 로그 $\log_{10} m$ 을 m의 상용로그수 또는 상용로그라고 부르고 $\lg m$ 으로 표시한다.

상용로그의 값을 로그수표로도 구할수 있고 전자수산기로도 구할수 있다.

실례로 lg1.14를 수표에서 구하려면 1.14에서 1.1과 4가 마주치는 곳에서 0 569을 찾아 0.056 9를 쓰면 된다.

n	0		4		1	2	
.			↓				
.							
1.1	→		0 569				
.							
.							

문 제

1. 다음 상용로그를 구하여라.

1) lg2 2) lg4 3) lg7

2. 다음 상용로그를 구하여라.

1) lg2.32 2) lg3.37 3) lg7.2

알아보기 1. lg1 은 얼마인가?

2. $\lg\frac{1}{10}$, $\lg\frac{1}{100}$ 은 얼마인가?

3. lg10, lg100 은 얼마인가?

알아보기 정수 A 의 표준지수형식이 $A=a\cdot10^m(1\le a<10,\ m\in I)$이면

$\lg A=(\lg a\cdot10^m)=m+\lg a$, $[\lg A]=m$, $\{\lg A\}=\lg a$ 이다. 왜 그런가?

로그의 옹근수부와 소수부

$$A=a\cdot10^m \Leftrightarrow \lg A=m+\lg a$$

$m \to [\lg A]$, $\lg a \to \{\lg A\}$

$(1\le a<10,\ m\in I)$

정수의 상용로그는 이 수의 표준지수에 표준결수의 상용로그를 더한 합과 같다. 상용로그의 옹근수부, 소수부를 각각 지표, 가수라고 부른다.

례 4 $A=1.02\cdot10^{-3}$ 이면

$\lg A=\lg(1.02\cdot10^{-3})=\underbrace{\lg1.02}_{\text{가수}}+\underbrace{(-3)}_{\text{지표}}$

문 제

1. 다음 수의 상용로그의 지표는 얼마인가? 또 가수를 표시하고 식을 써라.

1) 27.6	2) 130.6	3) 3.84	4) 627
5) 72 020	6) 0.1	7) 0.023	8) 0.002 564

2. $A\ge1$ 일 때 A 의 상용로그의 지표는 A 의 옹근수부에 들어있는 수자의 개수와 어떤 관계에 있는가?

$a>1$일 때 $\log_a x$에서

1) $x=1$이면 $\log_a x=0$

2) $0<x<1$이면 $\log_a x<0$

3) $x>1$이면 $\log_a x>0$

례 5 다음 상용로그에서 정수인것과 부수인것을 갈라내여라.

$$\lg 3.1,\quad \lg 0.172,\quad \lg 1\ 000,\ \lg 0.99$$

(풀이) 3.1, 1000은 1보다 크므로

$$\lg 3.1>0,\quad \lg 1\ 000>0$$

0.172, 0.99은 1보다 작으므로

$$\lg 0.172<0,\quad \lg 0.99<0$$

문 제

1. 다음 로그에서 정수와 부수를 갈라내여라.

$\log_2 3$, $\log_3 0.9$, $\log_7 0.7$

2. 다음 로그에서 정수와 부수를 갈라내여라.

$\log_{0.1} 10$, $\log_{0.01} 0.1$, $\log_{100} 10$, $\log_{10} 0.1$

해보기 다음 식에서 로그기호안에 변수가 들어있는 식을 골라내여라.

$\log_3 27$, $\log_9 x$, $\log_4 2x+1$, $\log_2 x+3$

로그기호안에 변수가 들어있는 식을 로그식이라고 부른다.

실례로 $\log_2 x$, $\lg(x+2)$, $\log_7(2x+1)+3$ 등은 로그식이다.

로그식에서도 한또래마디를 생각할수 있고 식을 정돈할수 있다.

문 제

1. 다음 로그식의 값을 구하여라.

1) $x=2$일 때 $\log_2 2x+\log_4(8x+2)$

2) $x=0.01$일 때 $\log_{0.1} x+\log_{0.01} 0.001x-4$

2. 다음 로그식의 값을 구하여라.

1) $x=1.75$일 때 $\lg x+3\lg 2x+7.5$

2) $x=5.52$일 때 $\lg\frac{x}{2}+2\lg\frac{x}{3}+3.2$

로그식을 계산할 때에는 로그의 성질을 자주 쓴다.

2. 로그의 성질

해보기 다음 두 값을 비교하여라.

$$2^{\log_2 8} \text{ 과 } 8, \quad 4^{\log_4 64} \text{ 와 } 64, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 16} \text{ 과 } 16$$

$$a^{\log_a m} = m$$

이 식은 로그의 성질을 밝히는데 많이 쓰인다.

적의 로그

정리 1. M, N>0 일 때

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

(증명) M>0, N>0 일 때

$$a^{\log_a M} = M, \qquad a^{\log_a N} = N$$

한편 지수법칙에 의하여

$$a^{\log_a M + \log_a N} = a^{\log_a M} \cdot a^{\log_a N} = M \cdot N$$

따라서 로그의 정의에 의하여

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

진수의 인수가 3개이상일 때에도 우와 같은 성질을 가진다.
일반적으로 $M_1, M_2, \cdots, M_n > 0$ 일 때

$$\log_a (M_1 M_2 \cdots M_n) = \log_a M_1 + \log_a M_2 + \cdots + \log_a M_n$$

례 1 $\log_2(32 \cdot 64) = \log_2 32 + \log_2 64 = 5 + 6 = 11$

문 제

1. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\log_2(8 \cdot 32)$　　2) $\log_4(64 \cdot 4 \cdot 4^{-2})$　　3) $\log_a a^3$

4) $\log_3(27 \cdot 3\sqrt{3})$　　5) $\log_6 4 + \log_6 9$　　6) $\log_3 1 + \log_3 3 + \log_3 9$

2. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\log_5 8+\log_5 0.25+\log_5 2.5$ 2) $\log_{10}2+\log_{10}\sqrt{3}+\log_{10}\sqrt{\frac{1}{6}}$

3. $\log_{10}3=a$, $\log_{10}5=b$라고 할 때 다음 식을 a와 b에 의하여 표시하여라.

1) $\log_{10}15$ 2) $\log_{10}45$ 3) $\log_{10}0.75$ 4) $\log_{10}225$

해보기 다음 계산과정을 보고 상의 로그가 무엇과 같은가를 말하여라.

$$\log_2\frac{64}{16}=\log_2\frac{2^6}{2^4}=\log_2 2^2=2$$

$$\log_2 64-\log_2 16=6-4=2$$

이므로

$$\log_2\frac{64}{16}=\log_2 64-\log_2 16$$

상의 로그

정리 2. M, N>0 일 때

$$\log_a\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}=\log_a\mathrm{M}-\log_a\mathrm{N}$$

(증명) $a^{\log_a\mathrm{M}-\log_a\mathrm{N}}=\frac{a^{\log_a\mathrm{M}}}{a^{\log_a\mathrm{N}}}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$

이므로

$$\log_a\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}=\log_a\mathrm{M}-\log_a\mathrm{N}$$

례 2 1) $\log_{10}\frac{1000}{100}=\log_{10}1000-\log_{10}100=3-2=1$

2) $\log_2 6-\log_2 3=\log_2\frac{6}{3}=\log_2 2=1$

문 제

1. 다음 로그를 구하여라.

1) $\log_5 \frac{625}{125}$　　2) $\log_3 \frac{9}{243}$　　3) $\log_{10} \frac{0.01}{100}$　　4) $\log_7 \frac{1}{49}$

2. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\log_{10} 3 - \log_{10} 0.3$　　2) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{27}$　　3) $\log_5 2 + \log_5 20 - \log_5 8$

3. 다음 같기식을 증명하여라.

$$\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$$

4. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 임을 알고 다음 로그를 구하여라.

1) $\log_{10} 6$　　2) $\log_{10} 5$　　3) $\log_{10} 60$

4) $\log_{10} 1.5$　　5) $\log_{10} \frac{1}{15}$　　6) $\log_{10} 0.06$

찾 기 다음 계산과정을 보고 제곱의 로그가 무엇과 같은가를 말하여라.

$$\log_a M^3 = \log_a (M \cdot M \cdot M)$$
$$= \log_a M + \log_a M + \log_a M$$
$$= 3 \log_a M$$

제곱의 로그

정리 3. M>0 이고 k가 실수일 때

$$\log_a M^k = k \log_a M$$

례 3 1) $\log_{10} 10^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_{10} 10 = \frac{1}{3}$

2) $\log_2 \sqrt[4]{8^3} = \log_2 8^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \log_2 8 = \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4}$

문 제

1. 공식 $\log_a \sqrt[n]{M} = \dfrac{\log_a M}{n}$ 을 증명하여라.

2. 다음 값을 구하여라.

1) $\log_2 \sqrt[4]{2}$ 2) $\log_3 \sqrt{3\sqrt{3}}$

3. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\log_3 \dfrac{4}{3} - 2\log_3 \sqrt{12}$ 2) $2\log_{10}\dfrac{5}{2} + \log_{10}18 - \log_{10}\dfrac{9}{8}$

3) $\log_{10}2 + \log_{10}\sqrt{15} - \dfrac{1}{2}\log_{10}0.6$

4. 정리 3을 써서 다음 갈기식이 옳다는것을 증명하여라.

1) $\log_2 5 \cdot \log_3 2 = \log_3 5$ 2) $\log_2 3 = \dfrac{1}{\log_3 2}$

로그밑수변환공식

정리 4. C>0, C≠1일 때

$$\log_a M = \frac{\log_c M}{\log_c a}$$

(증명) $\log_a M \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a M} = \log_c M$

이고 $\log_c a \neq 0$이므로

$$\log_a M = \frac{\log_c M}{\log_c a}$$

례 4 $\log_4 8$을 계산하여라.

(풀이) $\log_4 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 4} = \dfrac{3}{2}$

례 5 lg173을 전자수산기로 구하여라.

(풀이) 173 [log] ⟶ 2.238 046 1

문 제

1. 정리 4를 써서 다음 같기식을 증명하여라.

1） $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$　　2） $\log_{a^n} M = \dfrac{\log_a M}{n}$　　3） $\log_{\sqrt[n]{a}} M = n\log_a M$

2. 다음 로그를 구하여라.

1） $\log_{100} 10$　　2） $4\log_8 2$　　3） $\log_{25} 125$　　4） $\log_{64} 32$

3. 다음 식을 간단히 하여라.

1） $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6$　　2） $(\log_2 3 + \log_4 9 + \cdots + \log_{2^5} 3^5)\log_9 \sqrt[5]{32}$

4. $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ 일 때 다음 로그를 a, b 로 표시하여라.

1） $\log_2 12$　　2） $\log_{1000} \sqrt[3]{0.75}$

5. 다음것을 구하여라.

1） $\log_{12} 2 = a$ 일 때 $\log_6 64$

2） $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$ 일 때 $\log_{abc} x$

6. 3개의 수 $\log_3 2$, $\log_5 4$, $2^{0.3}$ 이 주어졌다. 그것들의 크기관계는 (　　)이다.

1） $\log_3 2 < \log_5 4 < 2^{0.3}$　　2） $2^{0.3} < \log_3 2 < \log_5 4$

3） $\log_5 4 < 2^{0.3} < \log_3 2$　　4） $\log_3 2 < 2^{0.3} < \log_5 4$

련 습 문 제

1. 다음 로그를 구하여라.

1） $\log_8 32$　　2） $\log_{81} 3\sqrt{3}$　　3） $\log_{64} \sqrt[3]{2}$

4） $\log_3 \sqrt[5]{243\sqrt{9}}$　　5） $\log_4 \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}$　　6） $\log_4 \dfrac{2\sqrt{32}}{\sqrt[3]{16}}$

2. 다음 식의 값을 구하여라.

1） $5^{-3\log_5 10}$　　2） $10^{2-\frac{1}{2}\log_{10} 0.001}$　　3） $(\sqrt{8})^{\log_2 25}$

3. 다음것을 구하여라.

1） $x = 2a^3bc^2$ 일 때 $\log_2 x$

2） $y=\frac{ab^3c}{2\sqrt{c}}$ 일 때 $\log_{10}y$

3） $z=2\sqrt[3]{\frac{ab\sqrt{c}}{m^2n\sqrt{p}}}$ 일 때 $\log_{10}z$

4. 다음 식의 값을 구하여라.

1） $\log_{10}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_{10}49-\log_{10}\frac{7}{20}$

2） $4\log_{10}\sqrt{150}-\log_{10}54+\log_{10}24$

3） $\frac{\log_5\sqrt{2}+\log_5 3-\log_5\sqrt{10}}{\log_5 1.8}$

4） $\log_{10}13+\frac{1}{2}\log_{10}11+\log_{10}\frac{4}{7}-\log_{10}\frac{13}{35}+\frac{1}{2}\log_{10}\frac{25}{11}$

5. $\log_{10}2=a$, $\log_{10}3=b$ 라고 할 때 다음 로그를 a, b 로 표시하여라.

1） $\log_{10}0.72$　　2) $\log_3 8$　　3) $\log_{12}3$　　4) $\log_{36}3$

6. $\log_2 3=a$, $\log_3 7=b$ 일 때 $\log_{42}56$ 을 a, b 로 표시하여라.

7. 다음 식의 값을 구하여라.

1） $\log_{\sqrt{2}}16\sqrt[3]{2}+\log_{\sqrt{8}}32\sqrt{2}$　　2） $64^{1-2\log_{16}12}$　　3） $\frac{4^{\frac{1}{2}\log_2 3+3\log_8 6}}{100^{\frac{1}{2}-\log_{10}\sqrt[4]{5}}}$

8. 다음 같기식이 옳은가? 그 리유를 설명하여라.

1） $\log_{10}(8+2)=\log_{10}8+\log_{10}2$　　2） $\log_{10}(8-2)=\log_{10}8-\log_{10}2$

9. 다음 같기식을 증명하여라.

$$\frac{\log_a M_1}{\log_a M_2}=\frac{\log_b M_1}{\log_b M_2}$$

이 같기식은 로그의 어떤 성질을 말해주고있는가?

10. $\log_3[\log_4(\log_5 a)]=\log_4[\log_3(\log_5 b)]=0$ 일 때 $\frac{a}{b}$ 의 값은 ( )이다.

1） 4　　2） 5　　3） 3　　4） $\frac{1}{5}$

11. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\log_{10}\frac{\sqrt{11+2\sqrt{10}}+\sqrt{11-2\sqrt{10}}}{\sqrt{11+2\sqrt{10}}-\sqrt{11-2\sqrt{10}}}$　　　2) $\log_8(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})$

12. 3^{50}은 몇자리수인가?(lg3=0.4771)

13. 로그의 지표가 3인 수는 어떤 범위의 수인가? 그러한 자연수는 모두 몇개인가?

14. 0.4를 35제곱하면 첫 유효수자는 소수점아래 몇번째 자리에 나타나는가?

15. x가 어떤 옹근수일 때 1.08^x의 옹근수부가 5자리수로 되는가?
(lg2=0.3010, lg3=0.4771)

16. 어느 한 공장에서는 모든 생산공정을 현대화하여 2005년부터 2011년까지의 기간에 생산을 해마다 평균 20%씩 증가시켰다. 이 기간에 생산이 몇배로 증가하였겠는가?

17. 피스톤이 한번 움직일 때마다 용기안의 공기가 $\frac{1}{8}$씩 빠지는 진공뽐프가 있다. 이 진공뽐프의 피스톤을 50번 움직이면 용기안의 압력은 얼마로 되겠는가? 용기안의 처음 압력은 10^5Pa이다.

복 습 문 제

1. n이 1보다 큰 자연수이고 $a\neq 1, a>0$이다. 다음 수들을 커가는 차례로 써라.

$$\sqrt[n]{a},\quad a^{n+1},\quad a^{2n},\quad \sqrt[n]{a^{n+1}},\quad \sqrt[2n]{a}$$

2. $x_2>x_1>0$, $a\neq 1$, $a>0$일 때 다음 식을 증명하여라.

$$\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}>a^{\frac{x_1+x_2}{2}}$$

3. 다음 로그가 무리수라는것을 증명하여라.

1) lg3　　　2) lg5

4. $a>b>0$일 때 다음 식을 증명하여라.

$$\frac{\lg a+\lg b}{2}<\lg\frac{a+b}{2}$$

5. $\log_a m+\log_b n=\log_a n+\log_b m$일 때 $a=b$ 또는 $m=n$이라는것을 증명하여라.

6．$\log_2 a=m,\ \log_5 a=n,\ \ \log_{10} a=p\ (a>0,\ \ a\neq 1)$일 때

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{p}$$

임을 증명하여라

7．다음 같기식을 증명하여라.

1) $\log_a c+\log_b c=0$ 일 때 $abc+1=ab+c$

2) $a,\ b,\ c$가 각각 1이 아닌 정수일 때 $a^{\lg\frac{b}{c}}b^{\lg\frac{c}{a}}c^{\lg\frac{a}{b}}=1$

8．$\log_{14}7=a$, $\log_{14}5=b$ 일 때 $\log_{35}8$을 $a,\ b$로 표시하여라.

9．$a,\ b,\ c$가 각각 1이 아닌 정수이고 $b^2=ac$이면

$$\frac{\log_a m}{\log_c m}=\frac{\log_a m-\log_b m}{\log_b m-\log_c m}(m>0)$$

이라는것을 증명하여라.

10．3각형의 세 변 $a,\ b,\ c$사이에

$$\log_{a+b}c+\log_{a-b}c=2\log_{a+b}c\cdot\log_{a-b}c$$

라는 관계가 있으면 이 3각형은 어떤 3각형인가?$(c\neq 1)$

11．$a,\ b,\ c$가 정수일 때

$$\lg a+\lg b+\lg c \text{ 와 } \lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{a+c}{2}$$

의 크기를 비교하여라.

12．다음 로그들의 크기를 비교하여라.

1) $\log_4 60$과 $\log_3 30$　　　　2) $\log_3 75$와 $\log_2 11$

13．흔들이의 주기 T와 길이 L사이에는 다음의 관계가 있다.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

주기가 3초인 흔들이의 길이는 얼마인가? $(\pi\approx 3.1416,\ \ g\approx 9.8\,\mathrm{m/s^2})$

14．$\lg a, \lg b$는 방정식 $2x^2-4x+1=0$의 두개의 풀이이다. $(\lg\frac{a}{b})^2$의 값은 얼마인가?

15. $a>b>c>1$ 이라면 다음 안갈기식에서 정확치 않은것은 어느것인가?

1) $a^c > b^c$　　2) $\log_a b > \log_a c$　　3) $c^a > c^b$　　4) $\log_b c > \log_a c$

16. $2^{\log_3 x}$ 을 x 의 제곱형태로 고쳐써라. (x 는 1 이 아닌 정수)

17. $a^{\frac{\log_{10}(\log_{10} a)}{\log_{10} a}}$ 을 간단히 하여라. ($a \neq 1$, $a>0$)

18. 47^{100} 이 168 자리수일 때 47^{17} 은 몇자리수인가?

19. 바다면으로부터 높이가 h인 곳에서 기압 P(mmHg)은 대략 다음과 같이 계산할수 있다.

$$P = P_0 \cdot 10^{-\frac{h}{18000}}$$

여기서 P_0은 바다면에서의 기압 즉 P_0=760mmHg 이다.

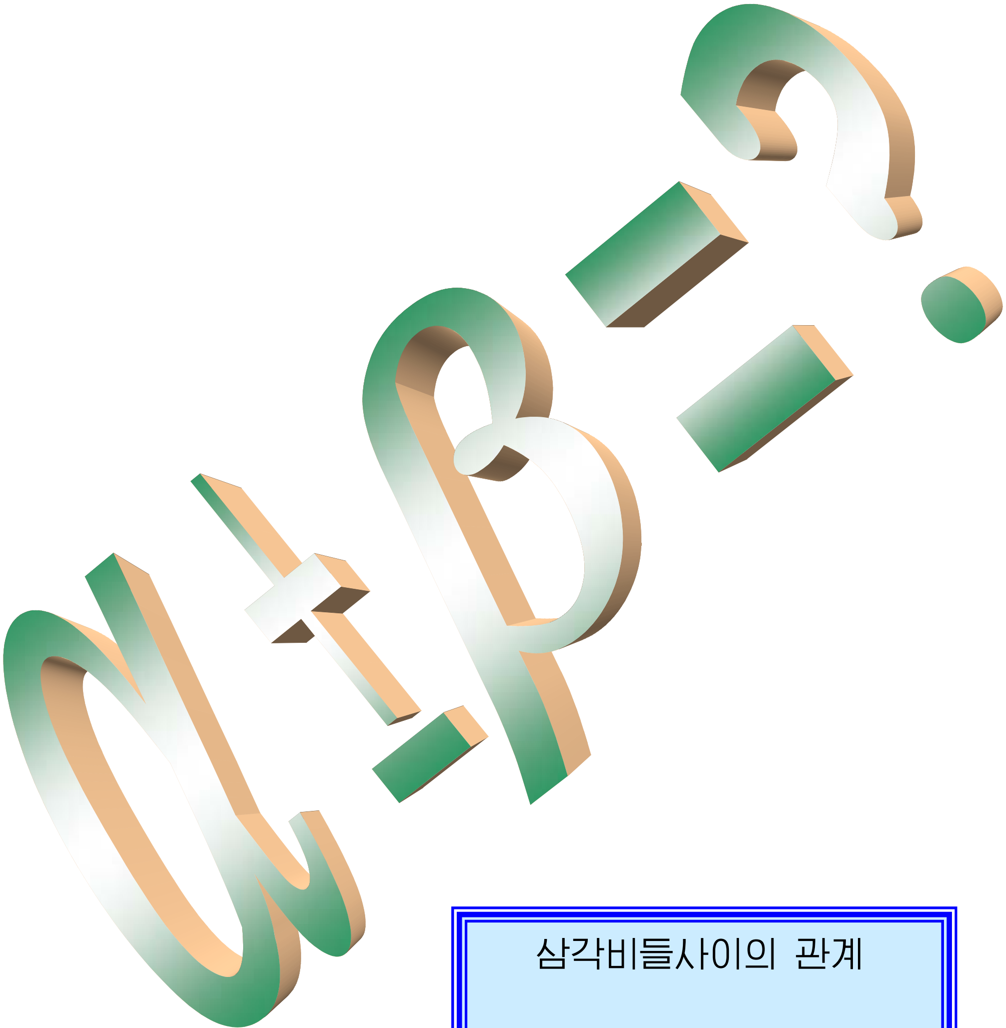
1) 높이가 2 750m 인 백두산에서의 기압을 계산하여라.

2) 얼마의 높이에서 기압이 $\frac{p_0}{2}$ 으로 되겠는가?

연 구

1. 지수식에 지수식을 더하거나 덜 때 그리고 곱하거나 나눌 때 지수식이 얻어진다고 말할수 있는가?
2. 로그식에 로그식을 더하거나 덜 때 그리고 곱하거나 나눌 때 로그식이 얻어진다고 말할수 있는가?

제 6 장. 삼각식



삼각비들사이의 관계

더하기공식

삼각식의 변형

제 1 절. 삼각비들사이의 관계

1. 삼각비

시작변이 시계바늘이 도는 방향과 반대방향으로 돌아 생긴 각을 **정각**, 같은 방향으로 돌아 생긴 각을 **부각**이라고 부른다.

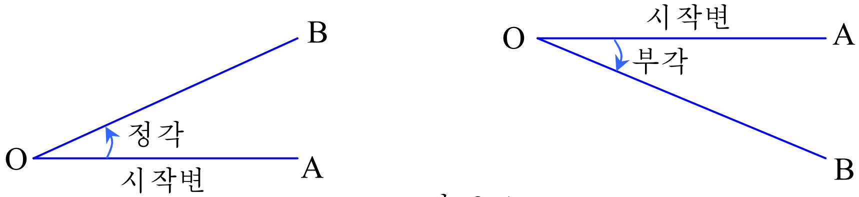


그림 6-1

정각의 크기는 정수로, 부각의 크기는 부수로 표시한다.

알아보기 그림 6-2 에서와 같이 자리표평면에 원 O(r)가 그려져있다. 점 M 이 1 사분구에 있을 때 ($0° < \theta < 90°$) 삼각비 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$ 의 이름을 불러보아라.

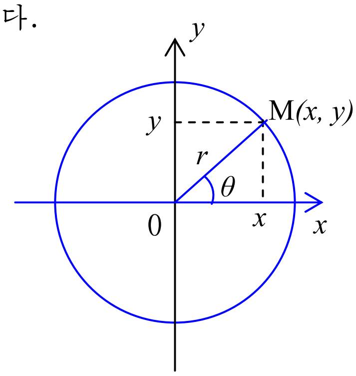


그림 6-2

$\theta \geq 90°$ 인 경우도 삼각비를 생각한다.

자리표평면에 원 $O(r)$가 있다.

원둘레의 점 $M(x,\ y)$을 생각하자.

반경 OM 이 x축으로부터 $120°$ 돌았을 때

$\frac{y}{r}$ 를 $120°$ 의 시누스라고 부르고 $\sin 120°$

로 표시한다.

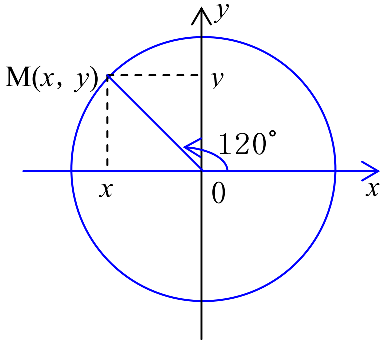


그림 6-3

일반적으로 $0° \leq \theta < 360°$ ($-360° < \theta \leq 0°$)인 각 θ 에 대하여 삼각비를 다음과 같이 정의한다.

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

다음 $\frac{x}{y}$ 를 $\cot\theta$ 로 표시하고 《코탕겐스 시타》라고 읽는다.

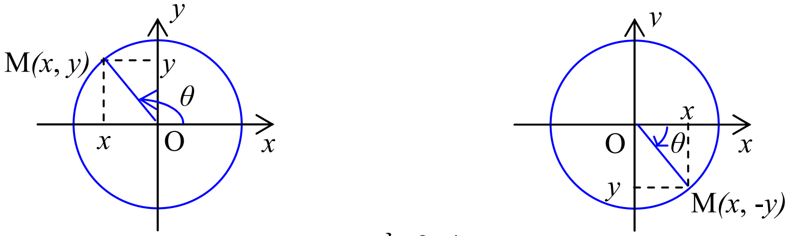


그림 6-4

$r>0$ 이므로 각 θ 의 삼각비의 부호는 x, y 의 부호에 따른다.

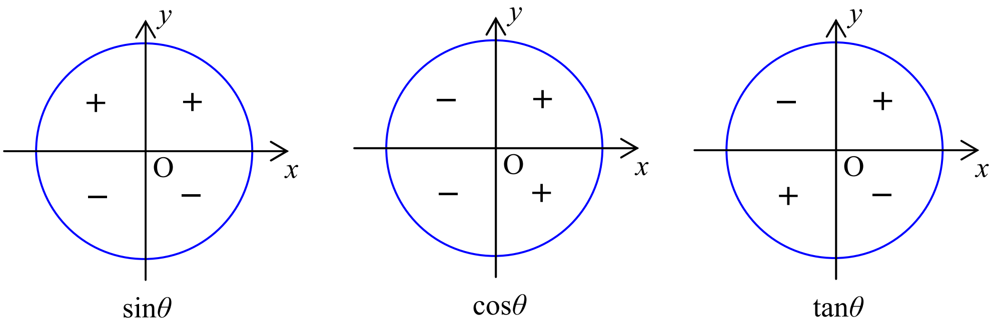


그림 6-5

례 반경 $r=2$ 인 원둘레에서 $\theta=-30°$ 인 점은 $M(\sqrt{3},\ -1)$이므로

$\sin(-30°)=-\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos(-30°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-30°)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\cot(-30°)=-\sqrt{3}$

$360°n+\theta$ 와 θ 의 삼각비는 같은것으로 본다.

문 제

1. 다음 삼각비의 값을 구하여라.

 1) $\sin 90°$ 2) $\cos 90°$

2. 다음 삼각비의 부호를 말하여라.

 1) $\sin 125°$ 2) $\cos 210°$ 3) $\tan 210°$

3. $0°<\alpha<30°$ 이면 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ 의 크기관계는 ( )이다.

1) $\sin\alpha < \cos\alpha < \tan\alpha < \cot\alpha$ 2) $\sin\alpha < \tan\alpha < \cos\alpha < \cot\alpha$

3) $\tan\alpha < \sin\alpha < \cos\alpha < \cot\alpha$ 4) 우의 답이 모두 틀린다.

2. 전화공식

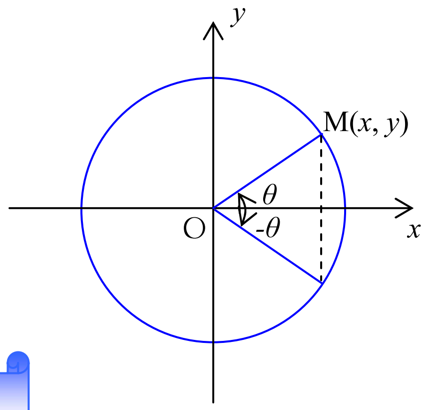


그림 6—6

알아보기 OM을 x축에 관하여 대칭이동하여 얻은 선분이 x축의 정방향과 이루는 각 $-\theta$에 대한 삼각비의 값들을 말하여라.

$\sin(-\theta)=-\sin\theta \quad \cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta \quad \cot(-\theta)=-\cot\theta$

례 1 $\sin(-15°)=-\sin15°$, $\cos(-120°)=\cos120°$

알아보기 OM을 y축에 관하여 대칭이동하여 얻은 선분이 x축의 정방향과 이루는 각 $180°-\theta$에 대한 삼각비의 값을 말하여라.

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$

$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$

$\cot(180°-\theta)=-\cot\theta$

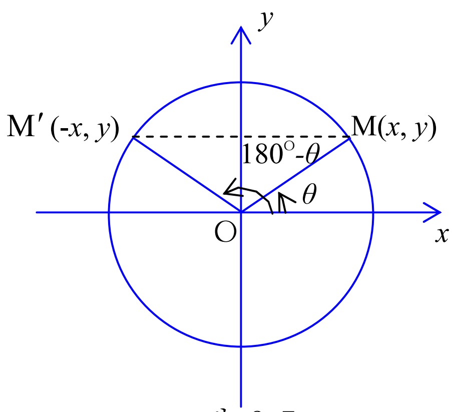


그림 6-7

례 2 $\sin165°=\sin(180°-15°)=\sin15°$

알아보기 $180°+\theta=180°-(-\theta)$에 대한 삼각비의 값들을 어떻게 구할수 있는가?

$\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$, $\cos(180°+\theta)=-\cos\theta$

$\tan(180°+\theta)=\tan\theta$, $\cot(180°+\theta)=\cot\theta$

례 3 $\cos195° = \cos(180° + 15°) = -\cos15°$

문 제

1. 다음 부각의 삼각비의 값을 정각의 삼각비의 값으로 고쳐라.

   $\sin(-126°)$, $\cos(-32°)$, $\tan(-260°)$, $\cot(-72°)$

2. 다음 식의 값을 구하여라.

   1) $\sin^2(-30°)$　　2) $2\sin(-60°)\cos(-60°)$

   3) $1+\sin^2(-90°)$　　4) $1-\tan(-30°)\cot(-30°)$

3. 다음 삼각비들을 뾰족각의 삼각비의 값으로 고쳐라.

   1) $\cos97°$　　2) $\tan132°$　　3) $\cot(-126°)$

4. 다음 삼각비값들을 $45°$보다 작은 각의 삼각비의 값으로 고쳐라.

   1) $\cos195°$　　2) $\sin(-205°)$　　3) $\tan199°$　　4) $\cot216°$

알아보기 OM을 직선 $y=x$에 관하여 대칭이동하여 얻은 선분이 x축의 정방향과 이루는 각 $90°-\theta$에 대한 삼각비의 값을 말하여라. 그리고 $90°+\theta$에 대한 삼각비의 값은 어떻게 되겠는가?

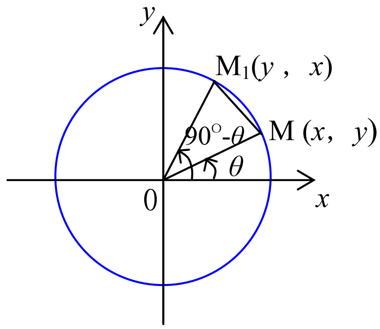


그림 6-8

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$　　$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

$\sin(90°+\theta)=\cos\theta$　　$\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$

$\tan(90°-\theta)=\cot\theta$　　$\cot(90°-\theta)=\tan\theta$

$\tan(90°+\theta)=-\cot\theta$　　$\cot(90°+\theta)=-\tan\theta$

례 4 $\sin65° = \sin(90° - 25°) = \cos25°$

$\sin95° = \sin(90° + 5°) = \cos5°$

$\cos72° = \cos(90° - 18°) = \sin18°$

$\cos105° = \cos(90° + 15°) = -\sin15°$

$\tan81° = \tan(90° - 9°) = \cot9°$

$\tan 116° = \tan(90° + 26°) = -\cot 26°$

$\cot 55° = \cot(90° - 35°) = \tan 35°$

$\cot 127° = \cot(90° + 37°) = -\tan 37°$

알아보기 $\sin(270° + \theta) = \sin[180° + (90° + \theta)]$

$= -\sin(90° + \theta)$

$= -\cos\theta$

$270° + \theta$에 대한 다른 삼각비의 값들을 알아보아라.

$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$	$\cos(270° - \theta) = -\sin\theta$
$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$	$\cos(270° + \theta) = \sin\theta$
$\tan(270° - \theta) = \cot\theta$	$\cot(270° - \theta) = \tan\theta$
$\tan(270° + \theta) = -\cot\theta$	$\cot(270° + \theta) = -\tan\theta$

례 5 $\sin 255° = \sin(270° - 15°) = -\cos 15°$

$\sin 280° = \sin(270° + 10°) = -\cos 10°$

$\cos 210° = \cos(270° - 60°) = -\sin 60°$

$\cos 316° = \cos(270° + 46°) = \sin 46°$

$\tan 235° = \tan(270° - 35°) = \cot 35°$

$\tan 297° = \tan(270° + 27°) = -\cot 27°$

$\cot 250° = \cot(270° - 20°) = \tan 20°$

$\cot 300° = \cot(270° + 30°) = -\tan 30°$

문 제

1. 다음 삼각비의 값을 뾰족각의 삼각비의 값으로 고쳐라.

1) $\sin(-150°)$ 2) $\cos 129°$ 3) $\tan 109°$ 4) $\cot(-136°)$

5) $\sin 292°$ 6) $\cos(-255°)$ 7) $\tan 302°$ 8) $\cot 267°$

2. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\sin^2(90° - \alpha)\cos(180° - \alpha)$

2) $\tan(270° + \alpha)\cot(360° - \alpha)$

3) $\sin(180° + \alpha) - \cos(270° - \alpha)$

4) $[3m\cos(-60°)]^3 - 4[m\cot(-30°)]^3 + 12\sin(-30°)$

5) $\dfrac{\sin(180° - \alpha)\cot(90° - \alpha)\cos(360° - \alpha)}{\tan(180° + \alpha)\tan(90° + \alpha)\sin(-\alpha)}$

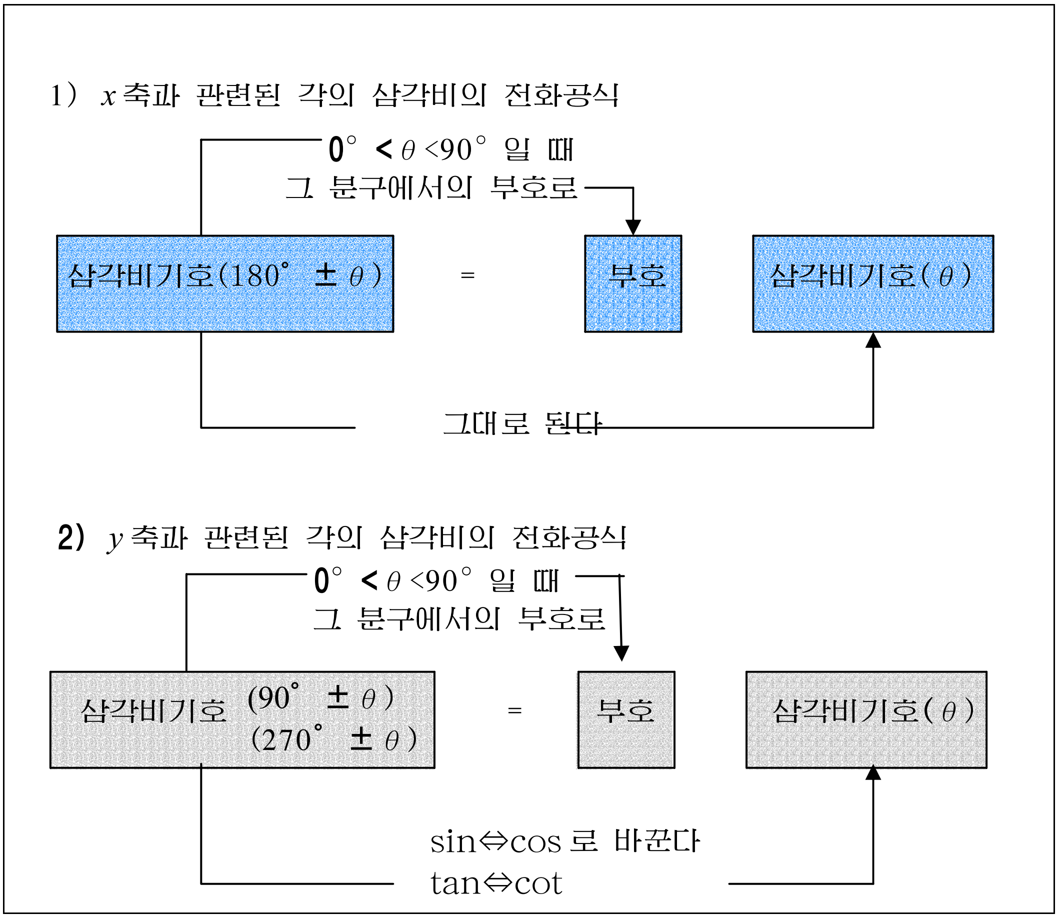
3. 다음것을 증명하여라.

1) $\cos 40° + \cos 100° + \cos 140° + \sin 10° = 0$

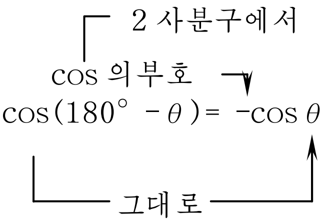
2) $\cot A + \tan(90° + A) + \tan(180° + A) + \cot(270° + A) = 0$

많은 전화공식들을 다음과 같이 기억하면 쓰기가 편리하다.

공식들의 기억에서는 두가지 즉 오른변에서 각 θ에 관한 삼각비의 부호와 기호를 정하는 규칙성을 알면 쉽다.



례 6



례 7

4 사분구에서

cot 의 부호

$\cot(270° + \theta) = -\tan\theta$

바뀐다

문 제

다음 삼각비의 전화공식을 쓰고 부호와 기호를 설명하여라.

1) $\sin(180° - \theta)$　　2) $\tan(180° + \theta)$　　3) $\cos(90° + \theta)$

4) $\sin(90° + \theta)$　　5) $\tan(270° - \theta)$

3. 기본삼각늘갈기식

해보기 삼각비의 정의를 써서 다음 갈기식을 증명하여라.

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　　2) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

기본삼각늘갈기식

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　　2) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

3) $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$　　4) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, $1 + \cot^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

례　$\sin\theta = -0.6$ 을 알고 θ에 대한 다른 삼각비의 값을 구하여라.

(풀이) $\sin\theta = -0.6 < 0$ 이므로 3 사분구나 4 사분구의 각이다.

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - (-0.6)^2 = 0.64$$

$$\cos\theta = \pm 0.8$$

즉 $180° < \theta < 270°$ 이면 $\cos\theta = -0.8$

$270° < \theta < 360°$ 이면 $\cos\theta = 0.8$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-0.6}{\mp 0.8} = \pm\frac{3}{4} = \pm 0.75$$

즉 $180° < \theta < 270°$ 이면 $\tan\theta = 0.75$

$270° < \theta < 360°$ 이면 $\tan\theta = -0.75$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\pm\frac{3}{4}} = \pm\frac{4}{3}$$

즉 180° $<\theta<$270° 이면 $\cot\theta = \frac{4}{3}$

270° $<\theta<$360° 이면 $\cot\theta = -\frac{4}{3}$

문 제

1. 다음 삼각비의 값을 알고 다른 삼각비의 값을 구하여라.

   1) $\cos\theta = \frac{3}{5}$ 2) $\tan\theta = -1$ 3) $\cot\theta = \frac{1}{3}$

   4) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ $(270° < \alpha < 360°)$ 5) $\tan\alpha = -2$ $(90° < \alpha < 180°)$

2. 다음 같기식을 증명하여라.

   1) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

   2) $\frac{1}{1+\sin^2\alpha} + \frac{1}{1+\frac{1}{\sin^2\alpha}} = 1$

   3) $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \frac{\tan\theta + 1}{\tan\theta - 1}$

   4) $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = \tan\alpha \tan\beta$

련 습 문 제

1. 다음의 삼각비의 값을 구하여라.

   1) θ=210°, 225°, 330° 일 때 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$

   2) θ=-30°, -60°, -225° 일 때 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$

2. 다음 식을 계산하여라.

   1) $(2\sin135°)^2$ 2) $3\cos210° - 5$

   3) $\frac{\sin 120°}{\tan^3 135°}$ 4) $2\cot225° - \frac{1}{\sin 90°}$

3. 다음 식을 간단히 하여라.

   1) $\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} + \sin\alpha\cos\alpha$

   2) $\sin\alpha(1+\tan\alpha) + \cos\alpha(1+\cot\alpha)$

   3) $\frac{\cos^4 3\alpha - \sin^4 3\alpha}{\sin^2 3\alpha - \cos^2 3\alpha} + \tan^2\alpha$

4) $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}+\cot^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\beta$

4. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1}}+\tan\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}\quad(0°<\alpha<90°)$

2) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\tan^2\alpha-1}$

3) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\ (180°<\alpha<270°)$　　4) $\left(\dfrac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\dfrac{1}{\sin\alpha}+\cot\alpha}\right)^2$

5. 다음것을 구하여라.

1) $\tan\theta=\sqrt{15},\ 180°<\theta<270°$ 일 때 $\cos(180°-\theta)$

2) $\sin\alpha=\dfrac{12}{13},\ 90°<\alpha<180°$ 일 때 $\sin(270°-\alpha)$

6. 다음 삼각비의 값을 알고 다른 삼각비의 값을 구하여라.

1) $\sin\alpha=-\dfrac{12}{13},\quad 180°<\alpha<270°$　　2) $\cos\alpha=-\dfrac{15}{17},\quad 90°<\alpha<180°$

3) $\tan\theta=-2.4,\ 270°<\theta<360°$　　4) $\cot\theta=-0.5,\ 90°<\theta<180°$

7. 다음 식의 값을 구하여라.

$\cos\alpha=0.6,\ 270°<\alpha<360°$ 일 때 $\left(1-\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)\left(1+\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)$

8. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\dfrac{(1-\sin\alpha-\cos\alpha)(1-\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}=-2$

2) $\dfrac{\cos^4\beta}{\cot^4\beta}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sin\beta}\tan\beta\right)^4}+2\sin^2\beta\cos^2\beta=1$

3) $1-\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cot\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\tan\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$

4) $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

9. $\sin\alpha=1$ 일 때 $\cos\alpha+\cot\alpha+\dfrac{1}{\sin\alpha}=1$ 이라는것을 증명하여라.

10. $\tan\alpha+\sin\alpha=a$, $\tan\alpha-\sin\alpha=b$ 일 때 $a^2-b^2=\pm4\sqrt{ab}$ 이라는것을 증명하여라.

11. 다음 식을 간단히 하여라.

1) $\left[\frac{1}{\cos 352^\circ} + \sin 172^\circ \cot(-262^\circ)\right] \cdot \left(\cos^2 140^\circ + \cos^2 50^\circ\right) \frac{1}{\cos(-8)^\circ}$

2) $\dfrac{-\sin(-240^\circ)\cot(-210^\circ)}{\frac{1}{\cos 300^\circ}\cot 15^\circ}$

3) $\cos\beta \tan(180° - \beta)\tan(270° - \beta)\frac{1}{\sin(90° - \beta)}$

4) $\dfrac{1-\cos(270° - 2\alpha) + \cos(2\alpha - 360°)}{1+\sin(2\alpha + 360°) - \sin(270° + 2\alpha)}$

12. $\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} + \frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} = 1$일 때 $\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha} = 1$이라는것을 증명하여라.

제 2 절. 더하기공식

1. 합과 차의 코시누스

알아보기 1) 다음 같기식이 옳은가?

$\cos(30° + 60°) = \cos 30° + \cos 60°$

$\sin(30° + 60°) = \sin 30° + \sin 60°$

$\tan(45° + 60°) = \tan 45° + \tan 60°$

2) 단위원둘레에서 $\angle XOA = \alpha$, $\angle XOB = \beta$로 되게 점 A, B를 잡자. 그러면 두 점의 자리표는 다음과 같다.

$A(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $B(\cos\beta, \sin\beta)$

이때 다음 같기식이 옳은가?

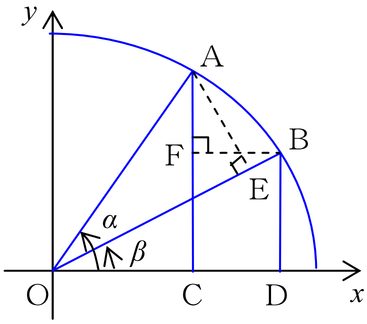


그림 6-9

$AB^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$

$AB^2 = [1-\cos(\alpha - \beta)]^2 + \sin^2(\alpha - \beta)$

정리 1. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(증명) $AB^2 = AF^2 + FB^2 = (\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2$

$= 2[1-(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)]$

$AB^2 = AE^2 + EB^2 = \sin^2(\alpha-\beta) + [1-\cos(\alpha-\beta)]^2$

$= 2[1-\cos(\alpha-\beta)]$

따라서 $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

β를 $-\beta$로 바꾸면

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$

$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

례 1 $\sin\alpha = \frac{8}{17}(0° < \alpha < 90°)$, $\sin\beta = -\frac{7}{25}(180° < \beta < 270°)$일 때 $\cos(\alpha-\beta)$를 계산하여라.

(풀이) $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2} = \frac{15}{17}$, $\cos\beta = -\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = -\frac{24}{25}$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{15}{17}\cdot\left(-\frac{24}{25}\right) + \frac{8}{17}\cdot\left(-\frac{7}{25}\right) = -\frac{416}{425}$

례 2 $\cos 75° = \cos(30°+45°) = \cos 30°\cos 45° - \sin 30°\sin 45°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

문 제

1. 다음 각의 코시누스값을 구하여라.
   1) 15° 2) 105° 3) -165° 4) 255° 5) -195°
2. 다음 식을 계산하여라.
   1) $\cos(\alpha-30°) - \cos(\alpha+120°)$ 2) $\cos(\alpha-150°) + \cos(\alpha-300°)$
3. 다음 같기식을 증명하여라.
   1) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$
   2) $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$ $- \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$
4. $\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha} + \frac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha} = 2\frac{1}{\sin\alpha}$임을 증명하여라.
5. $\tan\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} = 5$일 때 $\sin\alpha$의 값을 구하여라.

2. 합과 차의 시누스

정리 2.

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

(증명) $\sin(\alpha-\beta)=\cos(90°-\alpha+\beta)=\cos(90°-\alpha)\cos\beta-\sin(90°-\alpha)\sin\beta=$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

즉 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

여기서 β를 $-\beta$로 바꾸면

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

례 1) $\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

2) $\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(\sqrt{3}-1)$$

정리 3. 임의의 실수 a, b에 대하여 같기식

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$

가 성립하는 각 φ가 있다.

(증명) 자리표평면에서 점 M의 자리표를 M(a, b)라고 하면

$OM^2=a^2+b^2$ 즉 $OM=\sqrt{a^2+b^2}$

$\angle MOX=\varphi$라고 하면

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

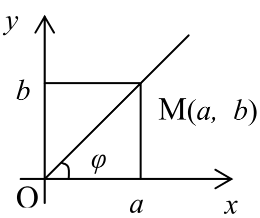


그림 6-10

따라서

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\varphi+\sin\varphi\cos\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$

문 제

1. 다음 각의 시누스를 계산하여라.

   1) $105°$　　2) $135°$　　3) $255°$　　4) $195°$

2. $\sin\alpha=\frac{3}{5}(0°<\alpha<90°)$, $\sin\beta=\frac{4}{5}(0°<\beta<90°)$일 때 다음 식을 계산하여라.

   1) $\sin(\alpha+\beta)$　　2) $\sin(\alpha-\beta)$

3. $\sin\alpha=\frac{3}{5}(90°<\alpha<180°)$, $\cos\beta=-\frac{4}{5}(180°<\beta<270°)$일 때 다음 식을 계산하여라.

   1) $\sin(\alpha+\beta)$　　2) $\sin(\alpha-\beta)$

4. 다음 식을 계산하여라.

   1) $\sin(\alpha-45°)+\cos(\alpha+45°)+\sin(135°+\alpha)+\cos(\alpha-135°)$

   2) $\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)$

   3) $\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$

5. 다음 삼각식을 하나의 삼각비로 변형하여라.

   1) $\sin\alpha-\cos\alpha$　　2) $\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}$

6. $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45°-\alpha)}{2\sin(60°+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}$의 값을 구하여라.

3. 합과 차의 탕겐스

정리 4. $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

(증명) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

($\cos\alpha\neq0$, $\cos\beta\neq0$ 일 때)

$$=\frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

β를 $-\beta$로 바꾸면 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

례 1 1) $\tan 15°=\tan(45°-30°)=\frac{\tan 45^0-\tan 30^0}{1+\tan 45^0\cdot\tan 30^0}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$=2-\sqrt{3}$

2) $\tan 75°=\tan(45°+30°)=\frac{\tan 45^o+\tan 30^o}{1-\tan 45^o\cdot\tan 30^o}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$

례 2 $\tan\alpha=9(0°<\alpha<90°)$, $\tan\beta=-0.5(90°<\beta<180°)$일 때 다음 식을 계산하여라.

1) $\tan(\alpha-\beta)$　　2) $\tan(\alpha+\beta)$

(풀이) 1) $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{9-(-0.5)}{1+9\cdot(-0.5)}=-\frac{19}{7}$

2) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{9+(-0.5)}{1-9\cdot(-0.5)}=\frac{17}{11}$

문 제

1. $\sin\alpha=0.8(0^o<\alpha<90^o)$, $\cos\beta=-\frac{15}{17}(180^o<\beta<270^o)$ 일 때 다음 식을 계산하여라.

   1) $\tan(\alpha+\beta)$　　2) $\tan(\alpha-\beta)$

2. 다음 각의 탕겐스값을 구하여라.

   1) 150°　　2) 105°

3. 다음 같기식을 증명하여라.

   1) $\sin(45°-\alpha)=\cos(45°+\alpha)$　　2) $\tan(45^o+\alpha)=\cot(45^o-\alpha)$

3) $\tan(45^\circ - \alpha) = \dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

4. $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{5}{6}$, $\tan(\alpha+\beta) = 1$일 때 $\tan\alpha$, $\tan\beta$를 구하여라.

련 습 문 제

1. α, β가 다 뾰족각이고 $\sin\alpha = \dfrac{13}{14}$, $\sin\beta = \dfrac{11}{14}$일 때

1) $\sin(\alpha+\beta)$의 값은 얼마인가?

2) $\alpha+\beta$는 몇도각인가?

2. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(180^\circ < \alpha < 270^\circ)$, $\cot\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}(270^\circ < \beta < 360^\circ)$일 때 다음 식을 계산하여라.

1) $\sin(\alpha+\beta)$ 2) $\cos(\alpha-\beta)$ 3) $\tan(\alpha-\beta)$ 4) $\cot(\alpha+\beta)$

3. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$ 2) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\tan\alpha-\tan\beta} = \cos\alpha\cos\beta$

3) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} + \dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha} = 0$

4. 다음 식을 계산하여라.

1) $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}$ 2) $\dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\sin(\alpha+150^\circ)} + \dfrac{1}{\sin(\alpha+210^\circ)}$

5. $\tan\alpha$, $\tan\beta$가 방정식 $x^2+6x+7=0$의 두 풀이일 때 $\cos^2(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

6. $A+B=60^\circ$, $\tan A+\tan B=3$이다. $\cos A\cos B=($ $)$이다.

1) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$ 2) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$ 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 4) $2\sqrt{3}$

7. $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, $\tan(270^\circ+\alpha) = \dfrac{4}{3}$이면 $\cos(\alpha-135^\circ)$의 값은 ( )이다.

1) $-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ 3) $-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ 4) $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

다음 같기식을 증명하여라. (8-11)

8. 1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

2) $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma)$

9. 1) $\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2\beta+2\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin\beta\cos\alpha=\sin^2\alpha$

2) $\cos^2(\alpha-\beta)+\cos^2\beta-2\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos\alpha\cos\beta=\sin^2\alpha$

10. $\dfrac{1+\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

11. 1) $\tan(30^\circ+\alpha)\tan(30^\circ-\alpha)=\dfrac{\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

2) $1-3\tan^2\alpha=\dfrac{4\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)}{\cos^2\alpha}$

12. $\tan A=1$, $\tan B=2$, $\tan C=3$ 일 때 $A+B+C$ 의 크기는 얼마인가?

13. $2(\sin\alpha+\cos\alpha)+3$ 은 α 의 어떤 값에 대해서도 정수라는것을 증명하여라.

14. 다음 삼각식을 하나의 삼각비로 변형하여라.

1) $\sin3\alpha+\cos3\alpha$

2) $4\sin\alpha+3\cos\alpha$

3) $\sin\alpha+2\cos\alpha$

4) $\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}$

제 3 절. 삼각식의 변형

1. 배각과 반각의 공식

해보기 더하기정리를 써서 다음 식을 계산하여라.

$\sin(\alpha+\alpha)$, $\cos(\alpha+\alpha)$, $\tan(\alpha+\alpha)$

배각의 공식

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

례 1 $\sin\alpha=0.6$ 일 때 $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$ $\sin2\alpha$를 구하여라.

(풀이) $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-(0.6)^2}=0.8$

따라서 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times0.6\times0.8=0.96$

알아보기 1. 다음것을 보고 $\cos\frac{\alpha}{2}$ 를 구해보아라.

$$1+\cos\alpha=1+\cos(2\times\frac{\alpha}{2})$$

$$=(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2})+(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2})=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

2. 다음 같기식이 옳은가?

1) $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ 2) $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan^2\frac{\alpha}{2}$

3) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}$

반각의 공식

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\ (=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha})$$

겹부호는 각각 $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\alpha}{2}$의 부호에 따라 정해진다는것을 표시한것이다.

례 2 $\sin 15^\circ=\sin\frac{30^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

례 3 $\tan\frac{\alpha}{2}=t$일 때 $\sin\alpha$를 구하여라.

(풀이) $\sin\alpha=\sin(2\cdot\frac{\alpha}{2})=$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

문 제

1. sinα=0.8, (90° < α <180°)일 때 sin2α, cos2α, tan2α를 구하여라.
2. 다음 식을 증명하여라.

   1) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$　　2) $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

   3) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$　　4) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

3. $\tan\alpha = k$를 알고 $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$를 구하여라.
4. 다음 식을 간단히 하여라.

   1) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$　　2) $\dfrac{\tan(270°+\alpha)-\cot(90°+\alpha)}{\cot(270°+\alpha)+\tan(90°+\alpha)}$

5. $\sin\alpha = -\dfrac{24}{25}$, (270° < α <360°)일 때 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\tan\dfrac{\alpha}{2}$를 구하여라.
6. $\tan\dfrac{\alpha}{2}=t$를 알고 다음 식을 증명하여라.

   1) $\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　　2) $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2}$

2. 적을 합으로, 합을 적으로 고치기

알아보기 다음 식이 옳은가?

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$
2) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$
3) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$
4) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

례 4 $\sin 3\theta\cos\theta=\frac{1}{2}(\sin 4\theta+\sin 2\theta)=\sin 2\theta\cos 2\theta+\sin\theta\cos\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+\sin\theta\cos\theta$

$=3\sin\theta\cos^3\theta-\sin^3\theta\cos\theta$

해보기 1. α, β에 관한 련립방정식

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha-\beta=y\end{cases}$$

을 풀어라.

2. 우의 공식에서 α, β, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$를 x, y로 표시하여라.

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

례 5 $\cos 15°+\cos 75°=2\cos\frac{15°+75°}{2}\cos\frac{15°-75°}{2}=2\cos 45°\cos 30°$

$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

례 6 다음 식을 증명하여라.

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos(\alpha-45°)$$

(풀이) $\sin\alpha+\cos\alpha=\cos(90°-\alpha)+\cos\alpha$

$=2\cos\left(45°+\frac{\alpha-\alpha}{2}\right)\cos\left(45°-\frac{2\alpha}{2}\right)$

$=2\cos 45°\cos(45°-\alpha)$

$=\sqrt{2}\cos(\alpha-45°)$

문 제

1. 다음 식을 합으로 고쳐라.

1) $2\cos 4\theta\cos\theta$ 2) $4\sin 3\theta\sin 6\theta$ 3) $-\cos 2\theta\sin\theta$

2. 다음 식을 적으로 고쳐라.

1) $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$ 2) $\cos 48^\circ+\cos 12^\circ$

3) $\sin 50^\circ-\sin 3^\circ$ 4) $\cos 10^\circ-\cos 20^\circ$

3. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+45^\circ)$ 2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

3) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\dfrac{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$ 4) $1+\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)=2\cos^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$

5) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)=2\cos^2\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)$

련 습 문 제

1. $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$ $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$일 때 $\cos 2\alpha$의 값을 구하여라.

2. $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}$일 때 $\sin 2\alpha$를 구하여라.

3. $\tan\alpha=3$일 때 $\sin 4\alpha$를 구하여라.

다음 같기식을 증명하여라.(4-5)

4. 1) $\cot\alpha=\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}$ 2) $1-\cot^2\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$

5. 1) $\dfrac{2\cot\alpha}{1+\cot^2\alpha}=\sin 2\alpha$ 2) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha\tan\dfrac{\alpha}{2}}=1+\cos\alpha$

3) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cot^2\alpha-\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha$ 4) $\dfrac{\sin^2\alpha-\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha-\cot^2\alpha}=\tan^6\alpha$

6. 1) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\tan\alpha$ 2) $\frac{2\sin^2(45°-\alpha)}{\cos 2\alpha}=\frac{1}{\cos 2\alpha}-\tan 2\alpha$

3) $2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=2\cos\frac{3}{2}\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$

4) $1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha=4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha$

7. 다음 식을 증명하여라.

$\sin\alpha+\sin\beta=a$, $\cos\alpha+\cos\beta=b$ 일 때

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$$

8. $\sin^3\alpha$ 를 배각의 삼각비로 표시하여라.

9. $\sin\theta$ 와 $\cos\theta$ 의 산수평균과 기하평균이 각각 $\sin\alpha$, $\sin\beta$ 이면

$$1-2\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\cos 2\beta=\cos^2(45°+\theta)$$

라는것을 증명하여라.

10. $\frac{\sin 7°+\cos 15°\sin 8°}{\cos 7°-\sin 15°\sin 8°}$ 의 값은 (   )이다.

1) $2+\sqrt{3}$ 2) $2-\sqrt{3}$ 3) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ 4) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

11. $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$ 이고 $0°<\alpha<180°$ 일 때 $\tan\alpha=$(   )이다.

1) $\frac{4}{3}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $-\frac{3}{4}$ 4) $-\frac{4}{3}$ 또는 $-\frac{3}{4}$

12. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\tan\alpha=0.2$ 일 때 $\frac{87}{3+4\cos 2\alpha}$ 의 값

2) $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{7}{5}$ 일 때 $\sin\alpha$ 의 값

13. $A+B+C=180°$ 일 때 다음 식을 증명하여라.

1) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

2) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

복 습 문 제

1. 다음 함수값들을 45° 보다 작은 각의 삼각비의 값으로 고쳐라.

   1) $\sin 190°$　　2) $\cos 115°$　　3) $\tan 295°$

2. 다음 식을 간단히 하여라.

   1) $\dfrac{\tan 170° \cot 180° \cos 350°}{\tan 190° \tan 100° \sin(-10)°}$　　2) $\dfrac{\cos(\alpha - 180°)\cot(90° + \alpha)\sin(360° - \alpha)}{\sin(180° + \alpha)\cot(270° - \alpha)}$

3. $\sin\alpha = \dfrac{15}{17}$, $90° < \alpha < 180°$ 일 때

$$\left(\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 - 1}\right)\cos^2\alpha$$

   의 값을 구하여라.

4. 다음 같기식을 증명하여라.

   $\tan^3\alpha = \dfrac{a}{b}$, $0° < \alpha < 90°$ 일 때

$$\frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

5. 다음 식을 간단히 하여라.

   1) $\dfrac{\sin^4 3\alpha - \cos^4 3\alpha}{\sin^2 3\alpha - \cos^2 3\alpha} + \tan^2\alpha$

   2) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\tan^2\alpha - 1}$

6. 다음 같기식을 증명하여라.

   1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta(1-\tan\alpha\tan\beta)$

   2) $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\tan\gamma-\tan\beta\tan\gamma)$

7. 다음 식을 간단히 하여라.

   1) $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$

   2) $\dfrac{1+\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha}{4\cos\dfrac{\alpha}{2}}$

8. 다음 같기식을 증명하여라.

1) $\sin(\alpha+h)-\sin\alpha=2\cos(\alpha+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}$

2) $\cos(\alpha+h)-\cos\alpha=-2\sin(\alpha+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}$

3) $\sqrt{1-\cos\alpha}+\sqrt{1+\cos\alpha}=\begin{cases}2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+45°\right), (0°\le\alpha<180°)\\ 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-45°\right), (180°\le\alpha<360°)\end{cases}$

9. $\sin\alpha=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$일 때 $\tan\frac{\alpha}{2}$를 구하여라.

10. $3\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha+k=\sin(2\alpha+\ell)$이 성립하는 k 와 ℓ의 값을 구하여라.

11. 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\frac{\sin 24°+\sin 6°}{\cos 24°+\cos 6°}$

2) $\frac{\sin 55°+\sin 35°}{\cos 80°+\cos 40°}$

3) $\sin 10°+\sin 50°-\sin 70°$

4) $\cos 20°+\cos 100°+\cos 140°$

다음 같기식을 증명하여라. (12-14)

12. 1) $\sin^4\alpha=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{8}\cos 4\alpha$

2) $\cos^3\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 4\alpha}{4}$

3) $\tan(30°+\alpha)\tan(30°-\alpha)=\frac{2\cos 2\alpha-1}{2\cos 2\alpha+1}$

4) $\frac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\cot\alpha$

13. 1) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\tan 2\alpha$

2) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

3) $a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\left[(a+c)+\sqrt{b^2+(a-c)^2}\sin(2\alpha-\varphi)\right]$

14. 1) $\sin\alpha+\cos\alpha+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+\sin 3\alpha+\cos 3\alpha=$

$$=4\sqrt{2}\cos(\frac{\alpha}{2}+30°)\cos(\frac{\alpha}{2}-30°)\cos(2\alpha-45°)$$

2) $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha=4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha$

3) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$

15. $\alpha+\beta+\gamma=180°$ 일 때

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

이라는것을 증명하여라.

16. $\alpha+\beta+\gamma=360°$ 일 때

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}-1$$

이라는것을 증명하여라.

17. $\alpha+\beta+\gamma=180°$ 일 때

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}=2+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

이라는것을 증명하여라.

상 식

세계에서 처음으로 삼각계산기를 발명한 우리 나라의 수학자 남병길

우리 나라의 수학자, 천문학자인 남병길(1820년-1869년)은 일찌부터 형 남병철의 도움을 받으면서 수학과 천문학을 깊이 연구하였다. 그는 구면에서 삼각계산을 기계적인 방법으로 쉽게 할수 있는 계산기인 《량도의》를 만들었다. 복잡한 계산을 기계로 하려는 시도는 다른 나라에서도 있었지만 삼각계산기계를 처음으로 만든 사람은 남병길이였다.

제 7 장. 3 각형의 풀이

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

시누스정리와 코시누스정리

3 각형의 풀이

제 1 절. 시누스정리와 코시누스정리

1. 시누스정리

알아보기 한 뾰족각이 $60°$인 직 3 각형 ABC 가 있다.

1) 세 변의 비 AC:AB:BC 를 알아보아라.

2) $\sin A:\sin B:\sin C$ 를 알아보아라.

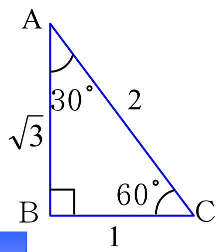


그림 7-1

시누스정리

정리 1. △ABC 에서

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

여기서 R 는 △ABC 의 외접원의 반경

(증명) $a=2R\sin A$ 임을 증명하자.

1) A < 90° 인 경우(그림 7-2)

점 B 와 중심 O 를 맺는 직선이 원둘레와 사귀는 점을 A′라고 하면 △A′BC 에서 C= 90° 이므로

$$BC=A'B\sin A'$$

여기서 BC=a, A′B=2R, A′=A 이므로

$$a=2R\sin A$$

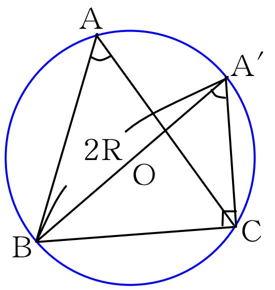


그림 7-2

2) A > 90° 인 경우(그림 7-3)

$$BC=A'B\sin A'$$

여기서 BC=a, A′B=2R, A′=180°−A 이므로

$$a=2R\sin(180°-A)=2R\sin A$$

3) A = 90° 인 경우

BC = 2R, $\sin A=\sin 90°=1$ 이므로

$$a=2R=2R\sin A$$

$b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$ 도 같은 방법으로 증명할수 있다.

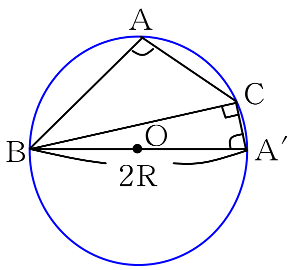


그림 7-3

시누스정리를 쓰면 다음의 갈기식이 성립한다.

$$a+b=4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$a-b=4R\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

이로부터 탕겐스정리라고 부르는 다음의 정리를 얻을수 있다.

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

문 제

1. △ABC에서 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$이면 이 3각형은 직3각형임을 증명하여라.
2. △ABC에서 $b\sin B=c\sin C$이면 이 3각형은 어떤 3각형인가?
3. △ABC에서 $a>b$이면 A>B라는것을 시누스정리를 써서 증명하여라.
4. 중심각이 120° 이고 반경이 5㎝인 부채형 OAB의 활등에 놓인 임의의 한 점 P에서 OA, OB에 그은 수직선의 밑점을 각각 M, N이라고 하면 MN의 길이는 일정하다는것을 밝혀라.
5. △ABC에서 변 a는 2cm, 세 각의 비 A:B:C는 3:4:5로 되여있다. 변 b, 변 c의 길이는 각각 얼마인가?
6. △ABC의 변 BC, CA, AB우에 각각 점 D, E, F를 찍어 △AEF, △BDF, △CDE의 외접원을 같게 하였을 때
   1) △DEF의 세 변의 비를 △ABC의 아낙각의 크기를 리용해서 표시하여라.
   2) 이 경우 △DEF는 △ABC와 닮았다는것을 증명하여라.

2. 코시누스정리

알아보기 △ABC의 정점 B에서 변 AC 또는 그 연장선에 그은 높이를 BD라고 할 때 다음의 사실이 성립하는가를 알아보아라.

1) A<90° $\Rightarrow a^2=BD^2+(b-AD)^2$, $BD^2=c^2-AD^2$ $\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2b\,AD$

2) A>90° $\Rightarrow a^2=b^2+c^2+2b\,AD$

3) A=90° $\Rightarrow a^2=b^2+c^2$

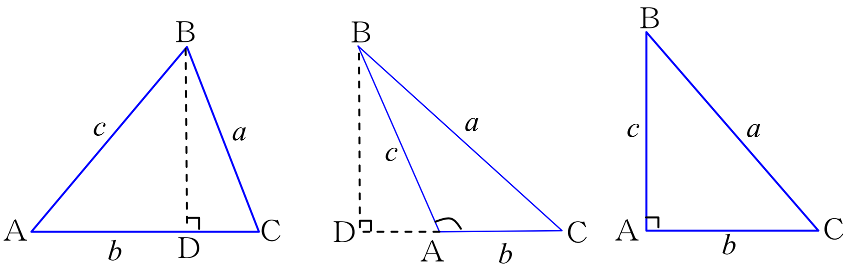


그림 7-4

코시누스정리

정리 2. △ABC 에서

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$

(증명) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 임을 증명하자.

1) $A<90°$ 인 경우

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,AD$$

여기서 $AD = c\cos A$ 이므로

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

2) $A>90°$ 인 경우

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b\,AD$$

여기서 $AD = c\cos(180° - A) = -c\cos A$ 이므로

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

3) $A=90°$ 인 경우

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \cos A = 0 \text{ 이므로}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

나머지 두 같기식도 같은 방법으로 증명할수 있다.

문 제

1. △ABC 에서 $b=3\sqrt{3}$, $c=6$, $A=30°$ 일 때 B 를 구하여라.
2. △ABC 에서 $a\cos A = b\cos B$ 이면 이 3각형은 2등변3각형이든가 직3각형임을 증명하여라.
3. △ABC 에서 $a\cos B = b\cos A$ 이면 이 3 각형은 어떤 3 각형인가?

련 습 문 제

1. △ABC 에서 $2b=a+c$ 일 때 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$ 의 값을 구하여라.
2. △ABC 에서 같기식 $a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$ 이 성립한다는것을 증명하여라.
3. 직3각형 ABC에서 A의 2등분선이 빗변 BC와 사귀는 점을 D, 변 AC의 가운데점을 E라고 하자. $AB=c$, $AC=b$일 때 $\sin(\angle EDC)$를 구하여라.

4. 그림 7-5와 같이 지점 A와 B에서 직접 잴수 없는지점 P까지의 거리 PA, PB를 구하여라.

L=306.4m, α=46° 12′, β=58° 36′

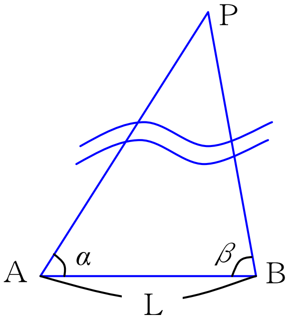


그림 7-5

5. △ABC에서 다음 갈기식이 성립한다는것을 증명하여라.

1) $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

2) $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$

6. △ABC 에서 갈기식 $\frac{\tan B}{\tan C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$ 이 성립한다는것을 증명하여라.

7. 그림 7-6과 같이 직접 잴수 없는 두 지점사이의 거리를 결정하기 위하여 다음과 같은값들을 재였다. PQ를 구하여라.

L=245, α=114° 10′, β=32° 48′, γ=106° 57′, δ=37° 12′

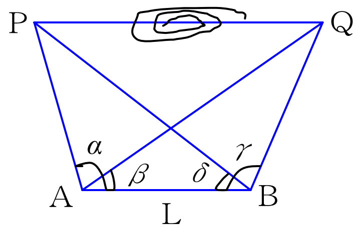


그림 7-6

제 2 절. 3각형의 풀이

알아보기 △ABC에서 요소 a, b, c, A, B, C가운데서 적어도 어떤 요소들이 있어야 3각형이 정해지는가?

3각형을 푼다는것은 3각형을 결정하는 요소들을 알고 나머지 요소들을 구하는것을 말한다.

찾기 A, B, a가 주어진 경우 C, b, a를 어떻게 구할수 있는가?

시누스정리를 써서 두 각과 한 변을 알고 다른 변을 구하는 공식

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

를 이끌어내여라.

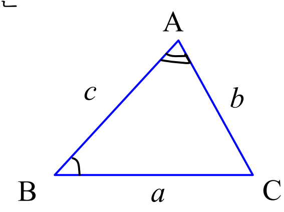


그림 7-7

1. 두 각과 한 변이 주어진 경우(A, B, a)

$$C=180° -(A+B)$$

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

례 △ABC 에서 다음과 같은 요소들을 알고 나머지 요소들을 구하여라.

$$A=37°54',\qquad B=77°12',\qquad a=631$$

(풀이) $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=\dfrac{631\cdot\sin 77°12'}{\sin 37°54'}$

문 제

△ABC 에서 다음과 같은 요소들을 알고 나머지 요소들을 구하여라.

1) $B=63°16'$, $C=41°25'$, $a=186.6$

2) $A=38°27'$, $C=39°32'$, $b=10.3$

3) $A=132°15'$, $B=38°10'$, $c=678$

찾 기 a, b, C 가 주어진 경우 A, B, c 를 어떻게 구할수 있겠는가?

2. 두 변과 그사이의 각이 주어진 경우(a, b, C)

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$$

$$\sin A=\frac{a\sin C}{c}$$

$$B=180° -(A+C)$$

문 제

△ABC 에서 다음과 같은 요소들을 알고 나머지 요소들을 구하여라.

1) $a=42.6$, $b=63.5$, $C = 72°46'$

2) $a=114.3$, $c=84.8$, $B = 25°43'$

3) $b=6.21$, $c=10.93$, $A = 106°37'$

찾 기 두 변과 한 맞은각사이에 다음과 같은 조건이 성립할 때 3각형이 결정되는가를 따져보아라.

1) $a>b\sin A$, $A<90°$

2) $a=b\sin A$, $A<90°$

3) $a<b\sin A$, $A<90°$

이때 3각형이 결정되는 경우에는 나머지 요소들을 어떻게 구할수 있겠는가?

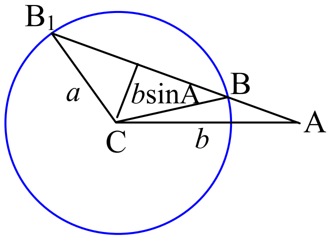


그림 7—8

3. 두변과 한 맞은각이 주어 진 경우(a, b, A)

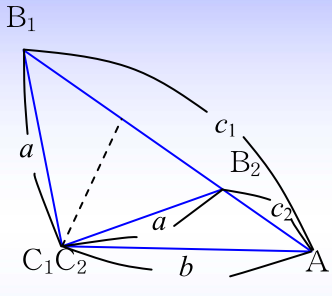
1) $a>b\sin A$ 인 경우

ΔAB_1C_1에 대하여

$$\sin B_1 = \frac{b\sin A}{a}$$

$$C_1 = 180° - (A + B_1)$$

$$c_1 = \frac{a\sin C_1}{\sin A}$$



ΔAB_2C_2에 대하여

$$\sin B_2 = \frac{b\sin A}{a}$$

$$C_2 = 180° - (A + B_2)$$

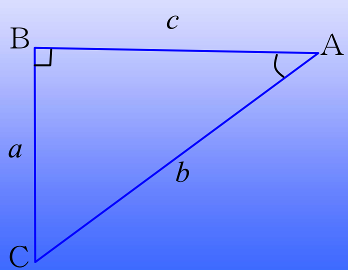
$$c_2 = \frac{a\sin C_2}{\sin A}$$

2) $a=b\sin A$ 인 경우

$B=90°$

$C=90°-A$

$c=b\cos A$



3) $a<b\sin A$ 인 경우 풀이가 없다.

문 제

1. $A \geq 90°$일 때 a, b, A 사이에 어떤 조건이 성립하여야 3각형이 정해지는가? 그때 3각형을 풀어라.
2. ΔABC에서 다음과 같은 요소들을 알고 나머지 요소들을 구하여라.
   1) $a = 83.2$, $b = 69.8$, $A = 71°18'$
   2) $a = 398$, $c = 310$, $C = 21°18'$
   3) $b = 85.2$, $c = 65.7$, $B = 68°12'$
   4) $a = 78$, $c = 29$, $A = 32°11'$

찾기 a, b, c가 주어진 경우 A, B, C를 어떻게 구할수 있는가?

4. 세 변이 주어진 경우 (a, b, c)

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$C = 180° - (A + B)$$

문 제

ΔABC에서 다음과 같은 요소들을 알고 나머지 요소를 구하여라.

1) $a = 108.2$, $b = 51.8$, $c = 78.3$
2) $a = 50$, $b = 52$, $c = 34$
3) $a = 139.5$, $b = 60.3$, $c = 104.2$

해보기 1. ΔABC의 정점 A에서 맞은변에 내린 높이를 h_a라고 하고 다음과 같은 경우 h_a를 각 B와 변 c로 표시하여라.

1) $B < 90°$ 2) $B = 90°$ 3) $B > 90°$

2. ΔABC의 면적 $S = \frac{1}{2} a h_a$로부터 $S = \frac{1}{2} ab \sin C$를 이끌어내여라.

3각형의 높이

$$h_a = c \sin B = b \sin C = 2R \sin B \sin C$$

여기서 $R : \Delta ABC$의 외접원의 반경

3각형의 면적

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=$$
$$=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

문 제

1. ΔABC의 면적을 S라고 하면 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (헤론의 공식)이라는것을 증명하여라. 여기서 $2p=a+b+c$이다.

2. ΔABC의 면적을 S라고 하면

 1) $S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$ 2) $S=\frac{abc}{4R}$

 이라는것을 증명하여라.

3. ΔABC의 내접원의 반경을 r라고 하면

 1) $r=\frac{S}{p}$ 2) $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

 이라는것을 증명하여라.(그림 7—9)

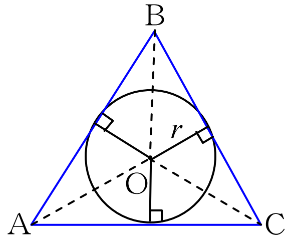


그림 7-9

탐 구

3각형의 면적공식 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$를 리용하여 시누스정리

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

를 유도하여라.

련 습 문 제

1. ΔABC에서 다음의 요소들을 알고 나머지 요소들을 구하여라.
 1) $a=23.46$, B$=97°15'$, C$=65°31'$
 2) $a=400.1$, A$=36°40'$, B$=79°50'$
 3) $a=49.4$, $b=26.4$, C$=47°20'$
 4) $a=87$, $b=65$, A$=75°45'$
 5) $a=13$, $b=18$, $c=15$

2. ΔABC의 정점 A에서 그은 가운데선을 m_a라고 하면

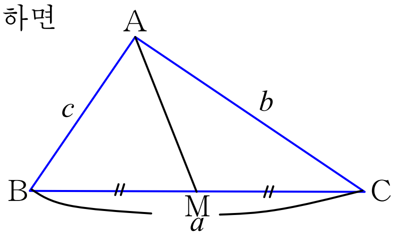


그림 7-10

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} =$$

$$= R\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$$

이라는것을 증명하여라.(그림 7-10)

3. ΔABC의 외접원의 반경은 10 cm이고 외접원둘레는 ΔABC에 의해서 3:4:5의 비로 나누인다. ΔABC의 면적을 구하여라.

4. 4각형 ABCD의 변의 길이가 AB=32, BC=13, CD=25, DA=18이고 대각선 AC=21이다. 이 4각형의 면적을 구하여라.

5. 제형의 두 밑변이 각각 a, b이고 두 밑각이 각각 α, β일 때 면적 S는

$$S = \frac{(b^2 - a^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

이라는것을 밝혀라.

복습문제

1. ΔABC에서

$$\sin A = \sin(B + C)$$
$$\sin B = \sin(A + C)$$
$$\sin C = \sin(A + B)$$

이라는것을 밝혀라.

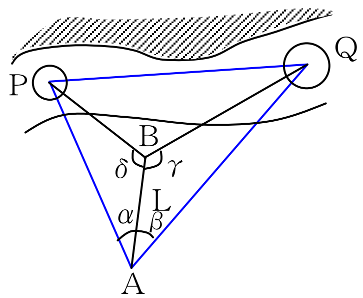


그림 7-11

2. 그림 7-11과 같이 직접 잴수 없는 두 지점 P, Q사이의 거리를 결정하기 위하여 다음과 같은 값들을 재였다. 거리 PQ를 구하여라.
L=2.743m, α=30°12′, β=41°25′,
γ=116°04′, δ=121°37′

3. 그림 7—12와 같이 두 지점 P, Q사이의 거리를 결정하기 위하여 다음과 같은 값들을 재였다. 거리 PQ를 구하여라.
L=3.125m, α=34°52′, β=52°16′
m=5.282m, n=6.742m

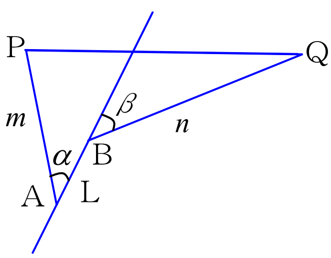


그림 7—12

4. 두 대각선의 길이가 a, b 이고 이것들이 이루는 각이 θ 인 4각형이 있다. 이 4각형의 면적을 구하여라.

5. 볼록 4 각형 ABCD 의 매개 변을 늘여서 AE=$\frac{1}{2}$BA, BF =$\frac{1}{2}$CB, CG=$\frac{1}{2}$DC, DH =$\frac{1}{2}$AD 와 같이 되도록 E, F, G, H 를 정해서 4 각형 EFGH 를 얻었다. 이때

$$\frac{4\text{각형 ABCD의 면적}}{4\text{각형 EFGH의 면적}}=\frac{2}{5}$$

이라는것을 증명하여라.

6. △ABC 에서 다음과 같은 요소들을 알고 나머지 요소들을 구하여라.

1) a=197, B=31°53′, C=8°10′

2) b=136, c=99, A=61°56′

3) a=176, b=111.6, B=32°23′

4) a=7.6, b=12.1, c=6.8

7. 강건너편의 두 지점 C, D 사이의 거리를 재기 위하여 기준선 AB 를 정하였다.

AB=500m, ∠CAB=70°, ∠DAB=50°, ∠DBA=77°, ∠CBA=61°

라고 하면 C, D 사이의 거리는 얼마인가?

8. △ABC 의 세 변을 a, b, c, 내접원의 세 접점을 맺어서 얻은 3 각형의 세 변의 길이를 a', b', c' 라고 하면

$$\frac{a'b'c'}{abc}=\frac{r^2}{2\mathrm{R}^2}$$

이라는것을 증명하여라.

9. △ABC 에서 다음 같기식이 성립한다는것을 증명하여라.

1) $\cos\mathrm{A}+\cos\mathrm{B}=\frac{2(a+b)}{c}\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2}$

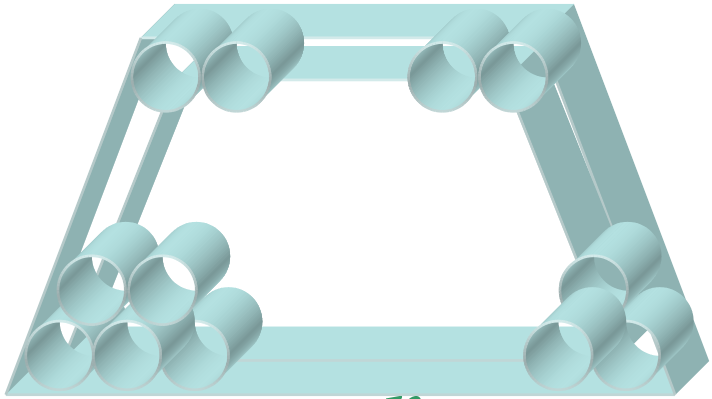
2) $2(bc\cos\mathrm{A}+ca\cos\mathrm{B}+ab\cos\mathrm{C})=a^2+b^2+c^2$

10. 다음 조건에 맞는 3 각형은 어떤 3 각형인가?

1) $\sin^2\mathrm{A}=\sin(\mathrm{B}+\mathrm{C})\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C})$

2) $\tan\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}=\frac{a-b}{c}$

제8장. 수 렬



$$a_n = a \cdot q^n$$

수렬의 의미

같은차수렬

같은비수렬

여러가지 수렬

수학적귀납법

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \sum_{k=1}^{n} b_k$$

제1절. 수렬의 의미

자연수를 1부터 100까지 크기순서로 늘여놓으면

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 100$$

또한 2의 배수를 크기 순서로 늘여놓으면

$$2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots$$

일정한 규칙에 따라 늘여놓은 수들의 렬을 수렬이라고 부른다.

수렬을 이루는 매개 수를 그 수렬의 **마디**라고 부른다. 그리고 처음부터 차례로 **첫째 마디, 둘째 마디, 셋째 마디,** … 라고 부른다.

마디가 몇개인가를 정할수 있는 수렬을 **유한수렬**, 마디가 끝없이 많은 수렬을 **무한수렬**이라고 부른다.

앞에서 든 수렬에서 첫째것은 유한수렬이고 둘째것은 무한수렬이다.

첫째 마디가 a_1, 둘째 마디가 a_2, …, n째마디가 a_n, … 인 수렬을

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

또는 간단히 (a_n)과 같이 표시한다.

수렬 1, 3, 5, 7, 9, … 에서

$n=1$ 이면 $a_1 = 2\cdot 1 - 1 = 1$

$n=2$ 이면 $a_2 = 2\cdot 2 - 1 = 3$

$n=3$ 이면 $a_3 = 2\cdot 3 - 1 = 5$

……………………………

일반적으로 $a_n = 2n - 1$

수렬의 n째 마디 a_n을 그 수렬의 **일반마디**라고 부른다.

일반마디가 알려지면 수렬은 정해진다.

례 1 일반마디가 $a_n = \dfrac{n}{n+1}$인 수렬을 써라.

(풀이) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$에 차례로 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 갈아넣으면

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},\quad a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3},\quad a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4},\quad \cdots$$

따라서 수렬은

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots$$

일반마디를 식으로 표시할수 없는 경우도 있다.

례를 들어 수렬

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, …

를 보자.

$$\sqrt{2}=1.414213\cdots$$

이라는것을 고려하면 첫째 마디는 소수점아래 첫째 자리까지 잡은 $\sqrt{2}$ 의 근사값이고 둘째 마디는 소수점아래 둘째 자리까지 잡은 근사값이다. 이렇게 톺아올라가면 n째 마디는 소수점아래 n째 자리까지 잡은 근사값이다.

이것은 식으로 표시할수 없다.

문 제

1. 다음 수렬은 어떤 규칙에 따라 만들어졌는가?

1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$　　2) 2, 8, 14, 20, …

2. 다음 수렬은 어떤 규칙에 따라 만들어졌는가? 일반마디를 구하여라.

1) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$　　2) $\frac{1}{2},\ \frac{4}{5},\ \frac{9}{10},\ \frac{16}{17},\ \cdots$

3) $\frac{3}{1},\ -\frac{5}{3},\ \frac{7}{5},\ -\frac{9}{7},\ \cdots$　　4) 1, 0, 1, 0, 1, …

3. 일반마디가 다음과 같은 수렬을 써라.

1) $a_n=2n+3$　　2) $a_n=\frac{n}{2n-1}$

3) $a_n=n^2-1$　　4) $a_n=(-1)^{n-1}n$

수렬의 매 마디의 값을 하나하나 다 주지 않고 처음 몇개 마디만 지적해주고 앞선 마디들로부터 a_n 을 구하는 관계식만 주어도 수렬 a_n 이 정해진다. 이때 a_n 을 구하는 관계식을 점화식(또는 귀납관계)이라고 부른다.

례 2 다음 점화식은 어떤 수렬을 정하는가?

1) $a_1=1$, $a_2=1$, $a_n= a_{n-1}+ a_{n-2}$ ($n=3$, 4, …)

2) $a_1=1$, $a_n=2a_{n-1}+1$ ($n=2$, 3, …)

(풀이) 1) $a_3=a_2+a_1=1+1=2$

$a_4=a_3+a_2=2+1=3$

$a_5=a_4+a_3=3+2=5$

… … … …

즉 다음과 같은 수렬이다.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

2) $a_2=2a_1+1=2\cdot1+1=3=2^2-1$

$a_3=2a_2+1=2\cdot3+1=7=2^3-1$

$a_4=2a_3+1=2\cdot7+1=15=2^4-1$

… … … … … … … … …

$a_n=2a_{n-1}+1=\cdots=2^n-1$

… … … … … …

즉 이 점화식은 수렬 (2^n-1)을 정한다.

점화식으로 주어진 수렬에서는 값이 알려진 처음 몇개 마디에 기초하여 같은 계산을 반복하게 되므로 콤퓨터를 리용하여 문제를 풀 때 아주 편리하다.

문 제

1. 다음 점화식은 어떤 수렬을 정하는가?

1) $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+n$ ($n = 2$, 3, …)

2) $a_1=2$, $a_n=-2a_{n-1}+3$ ($n = 2$, 3, …)

3) $a_1=a$, $a_n=\dfrac{n}{a_{n-1}}$ ($n = 2$, 3, …)

2. 어떤 종류의 세균이 매 분당 4배로 불어나고 그가운데서 25%는 죽는다고 한다. 처음에 10개의 세균이 있었다면 5분후에 몇개로 되겠는가?

제2절. 같은차수렬

1. 같은차수렬과 그 일반마디

알아보기 다음 수렬에서 이웃한 두마디의 차들을 구하여라. 무엇을 알수 있는가?

1) $(5n-3)$ 2) $(60-9n)$

수렬 (a_n)에서 이웃한 두마디의 차가 늘 같을 때 즉

$$a_{n+1}-a_n=d\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

일 때 이 수렬을 같은차수렬, 수 d를 공통차라고 부른다.

$$(a_n):\ \text{같은차수렬} \Leftrightarrow a_{n+1}-a_n=d\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

례 1 다음 수렬이 같은차수렬임을 밝히고 공통차를 구하여라.

1) 3, 7, 11, 15, … 2) $(3-2n)$

(풀이) 1) 7-3=11-7=15-11= … =4

따라서 공통차가 4인 같은차수렬이다.

2) $3-2(n+1)-(3-2n)=(3-2n)-(3-2n)-2=-2$

따라서 공통차가 -2인 같은차수렬이다.

첫째 마디 $a_1=a$ 와 공통차 d가 주어지면 같은차수렬이 정해진다.

$$d=a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

으로부터 점화식

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=a_n+d\ \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

를 얻는다. 이때

$$a_1=a$$
$$a_2=a+d$$
$$a_3=a_2+d=a+2d$$
$$a_4=a_3+d=a+3d$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

이므로 그 일반마디는 다음 공식으로 표시된다.

$$a_n=a+(n-1)d$$

례 2 첫째 마디가 10, 공통차가 -2인 같은차수렬의 21번째 마디를 구하여라.

(풀이) $a_1 = 10$, $d = -2$, $n = 21$이므로

$$a_{21} = 10 + (21-1)(-2) = -30$$

례 3 $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{3}$ 인 같은차수렬의 첫째 마디와 공통차, 일반마디를 구하여라.

(풀이) $a_1 = a$, 공통차를 d라고 하면

$a_2 = a + d$, $a_5 = a + 4d$이므로

$$\begin{cases} a + d = \frac{1}{2} \\ a + 4d = \frac{1}{3} \end{cases}$$

이것은 a와 d에 관한 련립방정식이다.

이것을 풀면

$$a = \frac{5}{9},\ d = -\frac{1}{18}$$

$$a_n = \frac{5}{9} + (n-1)\left(-\frac{1}{18}\right) = \frac{11-n}{18}$$

문 제

1. 다음과 같은 같은차수렬의 11번째 마디를 구하여라.

   1) $a_1 = 3$, $d = 5$ 2) $a_1 = 8$, $d = -2$ 3) $a_1 = -10$, $d = 3$

2. 다음과 같은 같은차수렬의 첫째 마디와 공통차를 구하여라.

   1) $a_7 = 1$, $a_{15} = -11$ 2) $a_3 = 1$, $a_6 = 10$

3. 넷째 마디가 12이고 둘째 마디와 여섯째마디의 비가 1 : 3인 같은차수렬의 첫째 마디와 공통차를 구하여라.

4. 첫째 마디가 81이고 공통차가 -3인 같은차수렬의 몇째 마디가 -51로 되는가?

5. 같은차수렬의 일반마디는 n에 관한 1차식으로 표시되고 거꾸로 일반마디가 n에 관한 1차식으로 표시되는 수렬은 같은차수렬이라는것을 밝혀라.

2. 같은차수렬의 합

같은차수렬

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \cdots$$

의 처음 5개 마디의 합 S_5를 계산하자.

$$S_5 = 4 + 7 + 10 + 13 + 16$$

이것을 달리 쓰면

$$S_5 = 16 + 13 + 10 + 7 + 4$$

변끼리 더하면

$$2S_5 = 20 + 20 + 20 + 20 + 20$$

따라서

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 5 = 50$$

해보기 일반적으로 첫째 마디 a_1과 n째 마디 a_n이 주어졌을 때 처음 n개 마디의 합 S_n을 구하는 공식을 만들어보아라.

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

첫째 마디 $a_1 = a$와 공통차 d가 주어진 경우에는 $a_n = a + (n-1)d$이므로 다음 공식으로 합을 계산한다.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

례 1 1부터 n까지의 자연수들의 합을 구하여라.

(풀이) $a_1=1$, $a_n=n$ 이므로

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

례 2 $a_3=12$, $a_6=27$인 같은차수렬에서 처음 몇개 마디의 합이 297로 되겠는가?

(풀이) 먼저 첫째 마디 $a_1 = a$와 공통차 d를 구하자.

$a_3 = a + 2d$, $a_6 = a + 5d$ 이므로

$$\begin{cases} a+2d=12 \\ a+5d=27 \end{cases}$$

이것을 풀면 $a=2,\quad d=5$

구하려는 마디의 개수를 n이라고 하면

$$S_n=\frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)\cdot 5]=297$$

정돈하면 $5n^2-n-594=0$

이것을 풀면 $n_1=11,\ n_2=-10.8$

따라서 구하려는 답은 $n=11$이다.

례 3 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$이 성립한다는것을 증명하여라.

(풀이) 이 식의 왼변은 홀수렬 $(2n-1)$의 처음 n개 마디의 합이다. 즉 첫째 마디 $a_1=1$, 공통차 $d=2$인 같은차수렬이므로

$$S_n=\frac{n}{2}[2\cdot 1+(n-1)\cdot 2]=\frac{n}{2}\cdot 2n=n^2$$

따라서 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

문 제

1. 정의 옹근수 m, n사이에 있으면서 5를 분모로 하는 모든 다 약분된 분수들의 총 합을 구하여라.
2. 다음 수렬에서 처음 10개 마디의 합을 구하여라.
   1) 3, 1, -1, …　　　　2) -5, 3, 11, …
3. $a_4=9$, $a_9=-6$인 같은차수렬에서 처음 몇개의 합이 -60보다 작아지겠는가?
4. 처음 n개 마디의 합이 $S_n=an^2+bn$으로 표시되는 수렬은 같은차수렬이라는것을 밝혀라.

련 습 문 제

1. 수렬 (a_n)이 같은차수렬이면 $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ $(n=2, 3, \cdots)$이 성립하고 이것의 거꿀도 성립한다는것을 증명하여라.
2. 같은차수렬을 이루는 세 수의 합이 45이고 가장 작은 수는 11이다. 이 수들을 구하여라.

3. 직3각형의 세 변이 같은차수렬을 이룰 때 세 변의 비가 3:4:5라는것을 밝혀라.

4. 구간 [13, 81]에 속하는 모든 홀수들의 합과 짝수들의 합은 각각 얼마인가?

5. $a_7 = 2$, $a_{10} = -7$인 같은차수렬에서 몇째 마디가 처음으로 부수로 되는가? 처음 몇개 마디의 합이 가장 크겠는가?

6. a, b, c가 같은차수렬을 이루면 $a^2+8bc=(2b+c)^2$이 성립한다는것을 증명하여라.

7. $a_1, a_2, \cdots, a_n$이 같은차수렬을 이루면

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

이 성립한다는것을 증명하여라.

8. 모든 같은차수렬 a_1, a_2, $\cdots$, a_n에 대하여

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

이 성립한다는것을 증명하여라.

9. 홀수들로 (1), (3, 5), (7, 9, 11), … 과 같이 묶음을 만들면 n째 묶음은 n개의 마디로 이루어진다. 이때 n째 묶음의 마디들의 합을 구하여라.

10. 짝수렬을 (2, 4), (6, 8, 10), (12, 14, 16, 18), … 과 같이 묶음을 만들었다. n째 묶음안에 있는 수들의 합을 구하여라.

11. 63km 떨어진 두 지점에서 두 조가 동시에 마주 향하여 떠났다. 첫 조는 시간당 200m씩 속도를 높이고 둘째 조는 시간당 400m씩 속도를 낮추었는데 두 조가 만났을 때 속도는 각각 5km/h였다. 두 조의 처음 속도를 구하여라.

12. 시간수만큼 종을 치는 벽시계는 하루에 종을 모두 몇번 치는가?

13. 통나무를 다음 그림 8-1과 같이 쌓았다. 모두 몇대인가?

14. 한곳에 30대의 세멘트전주가 쌓여있다. 이곳에서 1 000m 되는 곳에 한대의 전주를 세우고 그다음부터는 50m사이를 두고 전주를 세우려고 한다. 한번에 전주를 3대씩 싣는 자동차로 30대의 전주를 다 실어나르고 처음 자리로 돌아오려면 자동차는 모두 몇km를 달려야 하는가?

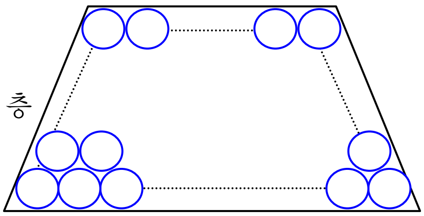


그림 8-1

16. 같은차수렬의 n째 마디는 $\frac{1}{m}$, m째 마디는 $\frac{1}{n}$이다. $(m \neq n)$ 이 수렬의 처음 mn개 마디의 합을 구하여라.

17. 세자리수들가운데서 2와 3으로 완제되는 수들의 합과 2 또는 3으로 완제되는 수들의 합을 구하여라.

제3절. 같은비수렬

1. 같은비수렬과 그 일반마디

알아보기 다음 수렬에서 이웃한 두 마디의 비를 구하여라.

무엇을 알수 있는가?

1) 1, 3, 9, 27, … 2) 2, -6, 18, -54, …

> 수렬 (a_n)의 이웃한 두 마디의 비가 늘 같을 때 즉
>
> $$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$
>
> 일 때 이 수렬을 같은비수렬, 수 q를 공통비라고 부른다.
>
> $$(a_n):\text{같은비수렬} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=q \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

례 1 다음 수렬이 같은비수렬임을 밝히고 그 공통비를 구하여라.

1) 3, 6, 12, 24, … 2) $(3 \cdot 2^n)$

(풀이) 1) $\frac{6}{3}=2,\ \frac{12}{6}=2,\ \frac{24}{12}=2,\ \cdots$ 이므로 1)은 $q=2$ 인 같은비수렬이다.

2) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3\cdot 2^{n+1}}{3\cdot 2^n}=2\ (n=1, 2, \cdots)$이므로 2)는 $q=2$인 같은비수렬이다.

첫째 마디 $a_1=a\ (\neq 0)$와 공통비 $q(\neq 0)$가 주어지면

$$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}\ (n=1, 2, \cdots)$$

로부터 점화식 $a_1=a,\quad a_{n+1}=qa_n\ (n=1, 2, \cdots)$을 얻는다.

이때

$$a_2 = aq, \quad a_3 = a_2 q = a q^2, \quad a_4 = a_3 q = a q^3, \cdots$$

이므로 같은비수렬 (a_n)의 일반마디는 다음 공식으로 표시된다.

$$a_n = a\,q^{n-1}$$

례 2 첫째 마디가 -5, 공통비가 3인 같은비수렬의 여섯째 마디를 구하여라.

(풀이) $a_1=-5$, $q=3$, $n=6$ 이므로

$$a_6 = 3^{6-1} \cdot (-5) = -1215$$

례 3 $a_5=-48$, $a_8=384$ 인 같은비수렬의 첫째 마디와 공통비를 구하여라.

(풀이) 첫째 마디를 a, 공통비를 q라고 하면

$a_5 = a\,q^4$, $a_8 = a\,q^7$이므로

$$a\,q^4 = -48, \quad a\,q^7 = 384$$

변끼리 나누면 $q^3 = -8$

이로부터 $q = -2$

따라서 $a = \dfrac{-48}{(-2)^4} = -3$

문 제

1. 공통비 q는 0이 아니다. 왜 그런가?
2. 다음 같은비수렬의 공통비와 일곱째 마디를 구하여라.

   1) 12, 6, 3, … 2) $2^{\frac{1}{2}}$, 2, $2^{\frac{3}{2}}$, … 3) $(-2)^n$

3. 넷째 마디가 32, 여섯째 마디가 8인 같은비수렬의 다섯째 및 일곱째 마디를 구하여라.
4. 4개의 치차의 직경들이 같은비수렬을 이룬다. 가장 작은 치차의 직경이 6cm, 가장 큰 치차의 직경이 48cm일 때 나머지 두 치차의 직경을 구하여라.

2. 같은비수렬의 합

같은비수렬$(2 \cdot 3^{n-1})$의 처음 5개 마디의 합 S_5를 구하자.

$$S_5=2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+2\cdot 3^4$$

$$3\cdot S_5=2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+2\cdot 3^4+2\cdot 3^5$$

변끼리 덜면

$$(1-3)\ S_5=2-2\cdot 3^5$$

이로부터

$$S_5=\frac{2(1-3^5)}{1-3}$$

해보기 첫째 마디가 $a_1=a$, 공통비가 q인 같은비수렬의 처음 n개 마디의 합 S_n을 구하는 공식을 만들어보아라.

$$a,\ qa,\ q^2a,\ \cdots,\ q^{n-1}a$$

$q=1$일 때 $S_n=?$

$q\neq 1$ 일 때 $S_n=?$

$q=1$일 때 $S_n=na$

$q\neq 1$ 일 때 $S_n=\dfrac{1-q^n}{1-q}a$

례 1 같은비수렬 1, 2, 4, 8, … 의 처음 8개 마디의 합을 구하여라.

(풀이) $a_1=1$, $q=2$, $n=8$이므로

$$S_8=\frac{1-2^8}{1-2}=255$$

례 2 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1}{8}$, $q>0$인 같은비수렬의 처음 6개 마디의 합을 구하여라.

(풀이) $a_3=a_1q^2$이므로

$$\frac{q^2}{2}=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$

따라서 $q = \frac{1}{2}$

그러므로

$$S_6 = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^6} = \frac{63}{64}$$

문 제

1. 다음 같은비수렬의 처음 8개 마디의 합을 구하여라.

   1) $a_1 = 3$, $q = 2$
   2) $a_1 = 8$, $q = -\frac{1}{2}$
   3) $a_1 = -8$, $q = -1$
   4) $a_1 = 5$, $a_3 = 20$

2. 첫째 마디가 1이고 공통비가 3인 같은비수렬에서 처음 몇개 마디의 합이 364로 되겠는가?
3. 첫째 마디가 11이고 공통비가 2인 같은비수렬에서 처음 몇개 마디의 합을 잡으면 그것이 1 000보다 크게 되겠는가?
4. 처음 n개 마디의 합이 $S_n = a^n - 1$로 표시되는 수렬은 같은비수렬이라는것을 밝혀라.
5. 옹근수 N을 씨인수분해할 때 $a^x b^y c^z$로 되였다면 N의 정의 약수들을 더한 합은 얼마인가?
6. 어떤 같은비수렬의 첫 n개 마디의 합을 S_n이라고 할 때 $S_n^2 + S_{2n}^2 = S_n(S_{2n} + S_{3n})$임을 증명하여라.

련 습 문 제

1. 다음 수렬가운데서 같은비수렬을 갈라내고 공통비를 구하여라.

   1) 2, 6, 10, 14, …
   2) 100, 10, 1, 0.1, …
   3) 10, 10, 10, 10, …
   4) 10, 20, 30, 40, …

2. 다음 수들을 구하여라.

   1) 같은비수렬을 이루는 세 수의 적이 64이고 가장 작은 수는 2이다.
   2) 같은비수렬을 이루는 세 수의 합이 19이고 그 적이 216이다.

3. 수렬 (a_n)이 같은비수렬이면 $(a_n > 0)$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad (n \geq 2)$$

   이 성립하고 이것의 거꿀도 성립한다는것을 증명하여라.

4. 4와 324사이에 3개의 수를 넣어 5개의 수가 같은비수렬을 이루도록 하여라.

5. 한 공장에서 2005년-2011년에 생산이 해마다 평균 14.6%씩 늘어났다. 2011년의 생산은 2003년에 비하여 몇배로 늘어났는가?

6. 어떤 낟알 한알을 심어 110알을 얻고 다음해에는 그것을 모두 심어 매 낟알에서 또 각각 110알씩 얻는다고 하면 5년동안에 심은 낟알은 몇알이나 되겠는가?

7. a, b, c가 같은차수렬을 이루고 x, y, z가 같은비수렬을 이룰 때 $x^b y^c z^a = x^c y^a z^b$이 성립한다는것을 증명하여라.

8. $1+3+3^2+\cdots+3^n>10000$ 이 성립하게 되는 가장 작은 자연수 n 을 구하여라.

제4절. 여러가지 수렬

1. 몇가지 간단한 수렬의 합

같은차수렬도 아니고 같은비수렬도 아닌 비교적 간단한 몇가지 수렬의 합을 구하자.

례 1 수렬 (n^2)의 처음 n개 마디의 합

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

을 구하여라.

(풀이) 늘갈기식

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

에서

$k=1$이면 $2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$k=2$이면 $3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

… … … … … … …

$k=n$이면 $(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

이 n개의 갈기식을 변끼리 더하면

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n$$

$$(n+1)^3-(n+1)=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

이로부터

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{n+1}{3}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

례 2 수렬 (na^{n-1}) $(a \neq 1)$의 처음 n개 마디의 합 $1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}$ 을 구하여라.

(풀이) 이 합을 S_n으로 표시하면

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1} \\ -)\quad aS_n = & a+2a^2+\cdots+(n-1)a^{n-1}+na^n \\ \hline (1-a)S_n = & 1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}-na^n \end{array}$$

따라서 $$S_n=\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a}$$

이로부터 $$1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}=\frac{1-(n+1)a^n+na^{n+1}}{(1-a)^2}$$

문 제

다음 합을 구하여라.

1) $10^2+11^2+\cdots+20^2$

2) $1+3b+5b^2+\cdots+(2n-1)b^{n-1}$

3) $1+4a+9a^2+\cdots+n^2a^{n-1}$

4) $1+\frac{4}{7}+\frac{7}{7^2}+\cdots+\frac{3n-2}{7^{n-1}}$

5) $1^3+2^3+\cdots+n^3$ (참고. $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$)

6) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ (참고. $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$)

7) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

2. 합기호 Σ

수렬의 합을 표시하는데 기호 Σ(시그마)를 리용하면 간단하고 편리하다. 례를 들어

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ 에서 첨수 k를 다른 글자로 바꾸어도 의미는 같다.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Σ의 성질

1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

2) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (c는 k에 무관계한 수)

(증명) 1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$

$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

2) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c a_1 + c a_2 + \cdots + c a_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ 에서 $a_k = c(k = 1, 2, \cdots, n)$이면 c를 n개 더하는것을 의미하므로

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

특히 $c=1$ 이면

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

례 $\sum_{k=1}^{n}(k^2-5k+1)$을 구하여라.

(풀이) $\sum_{k=1}^{n}(k^2-5k+1) = \sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}5k + \sum_{k=1}^{n}1$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{6}n[(n+1)(2n+1)-15(n+1)+6]$$

$$=\frac{1}{3}n(n^2-6n-4)$$

문 제

1. 다음 수렬의 처음 n개 마디의 합을 Σ를 써서 표시하여라.

   1) 1, 8, 27, 64, ⋯ 2) 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, ⋯ 3) 1・3, 2・5, 3・7, ⋯

   4) 4^2, 7^2, 10^2, ⋯ 5) 3, 3, 3, ⋯ 6) a, aq, aq^2, ⋯

2. 다음 합을 구하여라.

   1) $\sum_{k=1}^{n}(k^2-4)$ 2) $\sum_{k=1}^{n}k(k^2-1)$

련 습 문 제

1. 다음 합을 Σ를 쓰지 말고 표시하여라.

   1) $\sum_{k=1}^{5}\frac{2k}{k+1}$ 2) $\sum_{i=0}^{9}2^{i+1}$ 3) $\sum_{j=1}^{n}f(x_j)h_j$

2. 다음 수렬의 처음 n개 마디의 합을 구하여라.

   1) 9, 99, 999, 9 999, ⋯ 2) 1, 11, 111, 1 111, ⋯

3. 다음 합을 구하여라.

   1) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$ 2) $\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+1)$

   3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 4) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{2k-1}{2^{k-1}}$

   5) $x-2x^2+3x^3-4x^4+\cdots+(-1)^{n-1}nx^n$

6) $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2-1}$

4. $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 2$, …, $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$일 때 $\sum_{k=1}^{n} S_k$ 를 구하여라.

제5절. 수학적귀납법

알아보기 자연수 n에 관계되는 식 $f(n)=(n^2 - 5n + 5)^2$에서

$n=1$일 때 $f(1) = (1^2 - 5\cdot1 + 5)^2 = 1$

$n=2$일 때 $f(2) = (2^2 - 5\cdot2 + 5)^2 = 1$

$n=3$일 때 $f(3) = (3^2 - 5\cdot3 + 5)^2 = 1$

$n=4$일 때 $f(4) = (4^2 - 5\cdot4 + 5)^2 = 1$

이라는데로부터 $n=5$일 때도 $f(5)=1$이라고 말할수 있는가를 알아보아라.

일반적으로 자연수 n에 관계되는 명제를 P(n)으로 표시하자.

이 명제가 몇개의 자연수에 대하여 옳다고 하여 모든 자연수에 대해서도 옳다고 결론할수는 없다. 그렇다고 하여 많은 자연수에 대하여 하나하나 따져보는 방법으로 옳다는것을 확인할수도 없다.

몇개의 자연수에 대하여 명제 P(n)이 옳다는것을 확인한데 기초하여 모든 자연수에 대해서도 옳다는 결론을 이끌어내는 증명방법이 있다.

> 자연수 n에 관계되는 명제 P(n)에 대하여 다음 두 사실이 증명되면 P(n)은 모든 자연수 n에 대하여 옳다.
>
> 1) P(1)이 옳다.
>
> 2) P(k)가 옳으면 P(k+1)도 옳다.

사실 1)에 의하여 P(1)이 옳기때문에 2)에 의하여 P(2)가 옳으며 또한 P(3)도 옳다.

이 과정을 거듭하면

P(1), P(2), P(3), … , P(n), …

들이 다 옳다는것이 나온다.

이러한 증명방법을 **수학적귀납법**이라고 부른다.

수학적귀납법은 자연수에 관계되는 명제들을 증명할 때 널리 쓰인다.

례 1 수학적귀납법으로 다음 식을 증명하여라.

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(풀이) 1) $n=1$ 일 때

$$\text{왼변}=1,\quad \text{오른변}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=1$$

2) $n=k$ 일 때 옳다고 하자. 즉

$$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

그러면 $n=k+1$일 때

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)=$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1]$$

이리하여 모든 자연수 n에 대하여 갈기식이 성립한다.

례 2 수학적귀납법으로 모든 n에 대하여 안갈기식

$$(1+h)^n \geq 1+n\cdot h\ (h>-1)$$

이 성립한다는것을 증명하여라.

(풀이) 1) $n=1$ 일 때

$$\text{왼변}=(1+h)=1+h,\ \text{오른변}=1+1\cdot h=1+h$$

2) $n=k$일 때 옳다고 하자. 즉

$$(1+h)^k \geq 1+kh$$

그러면 $n=k+1$일 때

$$(1+h)^{k+1}=(1+h)^k(1+h)\geq(1+kh)(1+h)$$

$$=1+(k+1)h+kh^2\geq 1+(k+1)h$$

즉 안갈기식이 성립한다.

이리하여 모든 n에 대하여 안갈기식이 성립한다.

문 제

1. 다음것을 수학적귀납법으로 증명하여라.

1) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ 2) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$

2. 첫째 마디가 a, 공통차가 d인 같은차수렬의 일반마디는 $a_n=a+(n-1)d$라는것을 수학적귀납법으로 증명하여라.

3. 모든 자연수 n에 대하여 n^3+5n은 6으로 완제된다는것을 증명하여라.

수학적귀납법으로 명제 P(n)을 증명할 때 첫째 단계 1)에서 언제나 n=1일 때를 따져야 하는것은 아니다. 명제의 내용에 따라 0 또는 1보다 큰 어떤 자연수 n_0에 대하여 따져볼수도 있다.

례 3 수학적귀납법으로 $n\geq5$일 때 안같기식 $2^n>n^2$이 성립한다는것을 증명하여라.

(풀이) 1) n=5 일 때 $2^5=32>5^2=25$

2) $n=k$ 일 때 안같기식이 성립한다고 하자.

즉 $2^k>k^2$

그러면 $n=k+1$ 일 때

$$2^{k+1}=2\cdot2^k>2\cdot k^2$$

이고 $k\geq3$ 일 때

$$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-1)^2-2>0$$

이므로 $2^{k+1}>2k^2>(k+1)^2$

따라서 $n\geq5$ 인 모든 자연수에 대하여 안같기식이 성립한다.

문 제

1. 볼록n각형의 아낙각들의 합이 $(n-2)180°$ 라는것을 증명하여라.
2. $n^{n+1}>(n+1)^n$ $(n\geq3)$이 성립한다는것을 증명하여라.
3. 2kg짜리와 5kg짜리 저울추가 필요한만큼 있다고 하자. 이때 $n\geq4$인 모든 $n$kg의 물건을 달수 있다는것을 증명하여라.
4. 자연수 n에 대하여 다음의 안같기식이 성립한다는것을 수학적귀납법으로 증명하여라.

$$(1+2+\cdots+n)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\geq n^2$$

련 습 문 제

1. 수학적귀납법으로 다음 식을 증명하여라.

1) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

2) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

3) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

2. 수학적귀납법으로 다음 안갈기식을 증명하여라.

1) $2^n < n!$ $(n \geq 4)$

2) $2^{n+2} > 2n+5$

3) $|\sin nx| \leq n|\sin x|$

4) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ $(n > 1)$

5) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}$ $(x > 0,\ \ y > 0)$

3. 다음 명제를 증명하여라.

1) n^3+2n은 3으로 완제된다.

2) 3^n-2n-1은 4로 완제된다.

3) 볼록n각형의 대각선의 개수는 $\frac{1}{2}n(n-3)$이다.

4) n이 홀수이면 n^2-1은 8로 완제된다.

5) n^5-n은 5로 완제된다.

4. $1=1^2$

$2+3+4=9=3^2$

$3+4+5+6+7=25=5^2$

$4+5+6+7+8+9+10=49=7^2$

이 갈기식이 주는 일반법칙을 끌어내고 수학적귀납법으로 증명하여라.

복 습 문 제

1. 다음 수렬의 일반마디를 구하고 15째 마디를 써라.

   1) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, …

   2) $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$, …

   3) 1, 0, $\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{5}$, …

   4) −1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, …

2. 다음 점화식으로 주어진 수렬의 처음 5개마디와 100째 마디를 써라.

   1) $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 2$ ($n = 2, 3, \cdots$)

   2) $a_1 = 2$, $a_n = 3 \cdot a_{n-1}$ ($n = 2, 3, \cdots$)

   3) $a_1 = 2$, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+1)$ ($n = 2, 3, \cdots$)

3. 같은차수렬 (a_n)에 대하여 만든 다음 표에서 빈칸에 알맞는 수를 써넣어라.

번호	a_1	d	n	a_n	S_n
1	3	5	10		
2	7		9	39	
3	1	5		61	
4			4	54	80

4. 수렬 (a_n)과 (b_n)이 같은차수렬이면 $(a_n + b_n)$도 같은차수렬이라는것을 증명하여라.

5. 수렬 (a_n)의 처음 n개마디의 합이 $S_n = an^2 + bn + c$이다. (a_n)은 몇째 마디부터 같은차수렬을 이루는가?

6. 모든 마디가 정수인 같은차수렬 (a_n)에 대하여 안같기식

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{2n}{a_1 + a_n}$$

   이 성립한다는것을 증명하여라.

7. $S_n=n(5n-4)$인 수열 (a_n)을 구하여라.

8. 같은비수렬 (a_n) 에 대하여 만든 다음 표에서 빈칸에 알맞는 수를 써넣어라.

번호	a_1	q	n	a_n	S_n
1	1	3	6		
2		1/2	8	2	
3	2		7	1 458	
4		3		567	847

9. $a:b=b:c$, $a=b+c$, $b=c+d$, $c=d+e$일 때 정수들의 수렬 a, b, c, d, e는 같은비수렬이라는것을 밝히고 공통비를 구하여라.

10. $S_n=5^n-1$인 같은비수렬 (a_n)을 구하여라.

11. 같은비수렬을 이루는 세 수의 합이 26이다. 이 수들에 각각 1, 6, 3을 더하면 같은차수렬로 된다. 이 수들을 구하여라.

12. 경제적으로 쓸모있는 나무를 많이 심을데 대하여 주신 위대한 령도자 **김정일**대원수님의 유훈을 높이 받들고 한 농장에서는 올해에 10정보의 기름나무림을 조성하였다. 다음해부터 기름나무림을 매해 10%씩 더 조성한다면 8년후에는 모두 몇정보의 기름나무림을 조성하겠는가?

13. 20L의 알콜이 들어있는 통에서 알콜 1L를 퍼내고 그만큼 물을 채웠다. 다시 그 통에서 1L를 퍼내고 물을 그만큼 넣었다. 이렇게 10번 하면 통안에 알콜이 얼마나 남겠는가?

14. 다음과 같이 늘여놓은 두 수의 쌍들의 렬이 있다.

(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5), (6, 1), …

이 렬에서 (m, n)은 처음부터 몇번째에 놓이는가?

15. 세 자리자연수가운데서 7로 나눌 때 나머지가 2인것은 몇개인가? 그것들의 합을 구하여라.

16. 세 자리자연수가운데서 9로 나누면 7이 남고 15로 나누면 4가 남는 수들의 합을 구하여라.

17. 1 000보다 작은 자연수가운데서 다음 합을 구하여라.

1) 3으로 완제되는 수들의 합　　2) 5로 완제되는 수들의 합

3) 3과 5로 완제되는 수들의 합　　4) 3 또는 5로 완제되는 수들의 합

18. 3^n개의 같은 수자로 이루어진 옹근수는 3^n으로 완제된다는것을 증명하여라.

19. 수렬 (a_n)이 점화식

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n^2-1)a_n$$

으로 주어졌을 때 수학적귀납법으로

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$$

임을 증명하여라.

20. 수렬 (a_n)이 점화식 $a_1=1+a,\ a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+a\ (0<a<1)$을 만족시킨다. 모든 n에 대하여 $a_n>1$임을 증명하여라.

21. 자연수 n에 대하여 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}\leq n$을 증명하여라.

22. 수렬 1, 1+2, $1+2+2^2$, …, $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$의 n째 마디까지의 합은 ( )이다.

1) 2^n　　2) $2^{n-1}-n$　　3) 2^n-n　　4) $2^{n+1}-n-2$

아직도 풀리지 않은 문제- 골드바흐문제

18세기에 활동한 도이췰란드의 수학자 골드바흐는 당시 유명한 수학자였던 오일레르에게 다음과 같은 문제를 편지로 보내였다.

《4보다 작지 않은 모든 짝수는 두개의 씨수의 합으로 표시되고 7보다 작지 않은 모든 홀수는 세개의 씨수의 합으로 표시된다.》

이에 대하여 오일레르는 회답편지를 보냈는데 거기에서 《그 추측은 믿을수 있으나 증명하지 못하였다.》고 썼다고 한다. 그리하여 이 문제가 유명해지게 되였다.

세계의 수많은 학자들이 이것을 증명하려고 시도하였지만 아직까지 완전히 증명하지 못하였다. 다만 일부 부분적인 경우에만 증명되였을뿐이다.

상용로그수표(1

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2400	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3364	.3383	.3502	.3522	.3542	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3865	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4363	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5100	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5267	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6210	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6683	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

상용로그수표(2

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7589	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8041	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8229	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8917
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

삼각비의 표

각	sin	cos	tan
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6937	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

각	sin	cos	tan
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	

찾 아 보 기

편 찬 위 원 회

김용진, 김영인, 한성일, 강영백, 리호용,

김창선, 류해동, 조룡휘

총편집 교수, 박사 류 해 동

수학(제 1 중학교 제 4 학년용)

제 3 판

집 필 교수 박사 서기영, 교수 박사 류해동, 한상렬, 조룡휘, 부교수 김희일, 김원희, 오영일, 김봉희, 윤두성, 홍기숙, 박현희

심 사 심의위원회

편집 및 콤퓨터편성 김봉희

장 정 류명심 교 정 오혜란

낸 곳 교육도서출판사

인쇄소

2 판발행 주체 99(2010)년 3 월 29 일

3 판인쇄 주체 101(2012)년 월 일 3 판발행 주체 101(2012)년 월 일

교-10-보-506 값 40 원